Хлынова Н.С., учитель математики

МОУ «СОШ № 56 УИМ» г. Магнитогорска

Изучаем правила рационализации

В последнее время всё чаще можно видеть, что учащиеся старших классов при решении трансцендентных неравенств используют так называемый метод рационализации. В различных пособиях для подготовки к ЕГЭ, как правило, приведены лишь готовые формулы вышеуказанного метода. Мы считаем, что для повышения математической культуры старшеклассников, для того, чтобы решение задач было осознанным, равносильные переходы легче запоминались, необходимо с обучающимися на уроках разобрать, как получены эти правила. В практике работы считаем разумным начинать изучение метода рационализации лишь после того, как были освоены стандартные методы решения неравенств.

На первом уроке изучения метода рационализации, по нашему мнению, стоит повторить определения понятий «a>b», «a<b», области определения функций y=$log_a f(x)$, $y=\sqrt{f(x)}$, равносильные переходы для решений неравенств вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$, $|f(x)| > |g(x)|$, $log_a f(x) < log_a g$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$

1.Напомним, что решение логарифмического неравенства зависит от монотонности логарифмической функции. Запишем равносильный переход (учтём ОДЗ), рассмотрев два случая, при решении неравенства вида

$$log_{h(x)} f(x) < log_{h(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < h(x) < 1 \\ f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) > 1 \\ f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad (1)$$

Учитывая, что $g(x) > 0, f(x) > 0, h(x) > 0$, запишем оставшиеся неравенства совокупности (1), используя определение понятия «a>b» (a>b $\leftrightharpoons$ $a - b > 0$)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} h(x) - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h(x) - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Анализируя полученную совокупность, делаем вывод, что на ОДЗ неравенства выражения (h(x)-1), (f(x)-g(x)) имеют разные знаки, а значит их произведение отрицательно.

Итак, на ОДЗ данное неравенство, которое по определению можно заменить неравенством $log_{h(x)} f(x) - log_{h(x)} g(x) < 0$ равносильно неравенству (h(x)-1)· (f(x)-g(x))<0. Получили, правило метода рационализации: на ОДЗ знак разности $log_{h(x)} f(x) - log_{h(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения (h(x)-1)· (f(x)-g(x)). Для запоминания правила еще раз подчеркнем, что при стандартном методе решения нам пришлось бы сравнивать основание логарифма с единицей (это первый множитель произведения) и сравнивать f(x) с g(x) (это второй множитель).

2. Второе и третье правило, а именно:

а) на ОДЗ знак разности $log_a f(x) - log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения (а-1)· (f(x)-g(x)).

б) на ОДЗ знак выражения $log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения (а-1)· (f(x)-1), т.к. $log_a f(x) = log_a f(x) - 0 = log_a f(x) - log_a 1$.

следуют из первого.

3. Проводя аналогичные рассуждения (см. пункт 1.), получим равносильные переходы для решения показательного неравенства вида $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a - 1 < 0 \\ f(x) - g(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Знаки выражений (а-1) и (f(x)-g(x)) противоположны, поэтому произведение этих выражений отрицательно, как и выражение $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ (а- положительная константа).

Получили новое правило: знак разности $a^{f(x)} - a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения (а-1)· (f(x)-g(x)).

4. Для вывода следующего правила метода рационализации вспомним стандартный способ решения неравенства вида |f(x)|<|g(x)|: возводим обе части неравенства в квадрат, переносим в одну часть, раскладываем на множители по формуле разности квадратов.

$|f(x)|<|g(x)| \Leftrightarrow |f(x)|^2 < |g(x)|^2 \Leftrightarrow (f(x))^2 - (g(x))^2 < 0 \Leftrightarrow \big(f(x) - g(x)\big)\cdot\big(f(x) + g(x)\big) < 0$

С другой стороны, данное неравенство |f(x)|<|g(x)| равносильно неравенству f(x)|-|g(x)|<0, а значит, знак выражения |f(x)|-|g(x)| совпадает со знаком выражения $\big(f(x) - g(x)\big)\cdot\big(f(x) + g(x)\big)$.

Как правило, поняв алгоритм составления правил, обучающиеся могут получить правило рационализации для следующих неравенств самостоятельно.

5. $\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

на ОДЗ знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности f(x)-g(x)

Данную теорию считаем нужным давать на парном уроке математики, при этом получив каждое правило, записывать пример его применения, не доводя решения до конца. Для первого знакомства лучше подобрать самые простые неравенства. Решить неравенства:

1. $\log_{x^2}(x + 2) < 1$

$\log_{x^2}(x + 2) < \log_{x^2} x^2$

$\log_{x^2}(x + 2) - \log_{x^2} x^2 < 0$

на ОДЗ знак разности $log_{h(x)} f(x) - log_{h(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения (h(x)-1)· (f(x)-g(x)).

$$\begin{cases} x^2 > 0 \\ x^2 \neq 1 \\ x + 2 > 0 \\ (x^2 - 1)(x + 2 - x^2) < 0 \end{cases}$$

2.

$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} \leq 0$$

$$\log_{6-x} \frac{x^4}{x^2 - 12x + 36} = \log_{6-x} \left(\frac{x^2}{x - 6}\right)^2 = 2\log_{6-x} \left|\frac{x^2}{x - 6}\right| = 2\log_{6-x} \frac{x^2}{6 - x}$$

$$\log_{6-x}\frac{x^2}{6-x}\leq 0$$

По правилу рационализации

$$\begin{cases} 6-\mathrm{x}>0 \\ 6-\mathrm{x}\neq 1 \\ \dfrac{x^2}{6-x}>0 \\ (6-\mathrm{x}-1)(\dfrac{x^2}{6-x}-1)\leq 0 \end{cases}$$

3.

$$\frac{160-4^{\mathrm{x}}}{32-2^{\mathrm{x}}}\geq 5\Leftrightarrow\frac{4^{\mathrm{x}}-5\cdot 2^{\mathrm{x}}}{2^{\mathrm{x}}-32}\geq 0\Leftrightarrow\frac{2^{2\mathrm{x}}-2^{\mathrm{x}+\log_2 5}}{2^{\mathrm{x}}-2^5}\geq 0$$

По правилу рационализации получим $\frac{(2-1)(2\mathrm{x}-\log_2 5)}{(2-1)(\mathrm{x}-5)}\geq 0$

4.$\frac{|7\mathrm{x}-2|-|\mathrm{x}-9|}{|4\mathrm{x}-3|-|\mathrm{x}+3|}\leq 0$

Знак дроби зависит от знака числителя и знака знаменателя. Знаки числителя и знаменателя совпадают со знаками произведений по правилу рационализации.

$$\frac{(7\mathrm{x}-2-\mathrm{x}+9)(7\mathrm{x}-2+\mathrm{x}-9)}{(4\mathrm{x}-3-\mathrm{x}-3)(4\mathrm{x}-3+\mathrm{x}+3)}\leq 0.$$

5. $\frac{\sqrt{1-3x}-1}{\sqrt{2+x}-1}-1<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-1}<0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{1-3x}-\sqrt{2+x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{1}}<0$. Знак дроби зависит от знака числителя и знака знаменателя. На ОДЗ заменим числитель и знаменатель на выражения, знаки которых совпадают со знаками данных разностей по правилу рационализации.

$$\begin{cases} 1-3\mathrm{x}\geq 0 \\ 2+\mathrm{x}\geq 0 \\ \dfrac{1-3\mathrm{x}-(2+\mathrm{x})}{2+\mathrm{x}-1}<0. \end{cases}$$