Методические особенности обучения учащихся решению линейных уравнений с параметрами

В статье будут приведены некоторые методические рекомендации, позволяющие более доступно организовать обучение школьников решению линейных уравнений с параметрами. Будут рассмотрены основные виды задач, содержащие линейные уравнения с параметрами, представлены этапы их анализа и решения на примере наиболее часто встречающихся в школьном курсе математики заданий, а также приведены решения конкретных примеров.

Итак, несмотря на то, что программа по математике не упоминает в явном виде о задачах с параметрами и даже в учебниках для неспециализированных школ этим задачам отводится незначительное место, было бы ошибкой утверждать, что вопрос о решении задач с параметрами никоим образом не освещается в рамках школьного курса математики. Так, с параметрами мы встречаемся при введении некоторых понятий. Рассмотрим в качестве примеров следующие объекты:

- функция прямая пропорциональность: $y = kx$ (x и y - переменные; k - параметр, $k \neq 0$);
- линейная функция: $y = kx + b$ (x и y - переменные; k и b - параметры);
- линейное уравнение: $ax + b = 0$ (x - переменная; a и b - параметры);
- квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c =$ (x - переменная; a, b, c - параметры, $a \neq 0$);

К задачам с параметрами, рассматриваемым в школьном курсе, можно отнести, например, поиск решений линейных и квадратных уравнений в общем виде, исследование Естественно, что такой небольшой класс задач не позволяет учащимся овладеть методами решения задач с параметрами. В результате, у учащихся возникает психологический барьер уже при «первом» знакомстве с параметрами - это неизвестное и известное, переменная и постоянная.

Выход из сложившейся ситуации - включать задачи с параметрами в каждую тему.

Для решения задач с параметрами требуется:

а) свободное владение навыками решения уравнений;
б) знание специфических преобразований, которые используются в уравнениях;
в) умение построить логическую цепочку рассуждений.

Что дают задачи с параметрами:

а) отработку навыков решения уравнений;
б) повышают интеллектуальный уровень ученика и его логическое мышление;
в) формируют навыки исследовательской деятельности;
г) повышают интерес к математике.

Прежде чем ввести понятие «параметр», учащимся необходимо напомнить роль букв в алгебре. Итак, выражения, составленные из чисел, букв, знаков действий и скобок, называются буквенными выражениями или выражениями с переменной (с переменными). Необходимо обратить внимание ребят на то, что за буквой скрывается число. Предложите учащимся задания, в которых надо выразить одну переменную через другую. К этим задачам надо возвращаться постоянно, особенно в 7-м классе, поскольку умение выражать одну переменную через другую очень пригодится при решении задач по физике, где требуется вначале составить буквенное выражение и только затем подставить числовые значения.

Примеры:

1. Выразить x : а) $ax = a-1;$ б) $(a+2)\, x = a-1;$ в) $a\, x = a - 1.$
   Укажите, при каких значениях a имеет смысл полученное выражение.
   Найдите значение x при $a=2;\ a=3;\ a= -10.$
2. При решении уравнений типа $2x-2=-1; 14x=-4; 3-3x=1$ обратите внимание учащихся на то, что мы выразили неизвестное, которое надо найти, через числа.
   $2x-2=-1;$ *ответ:* $x = (-1+2):2;\ \ x = \frac{1}{2};$

14x=-4; ответ: x = -4: 14; x = $-\frac{2}{7}$;

3-3x=1; ответ: x = (1-3): (-3); x = $\frac{2}{3}$.

Линейное уравнение – это уравнение вида: $ax = b$, где х – переменная, a и b – некоторые числа.

Множество корней линейного уравнения может состоять из одного элемента (при а≠0), быть пустым множеством (при а = 0 и b≠0), быть бесконечным множеством (при а = 0 и b = 0).

Обязательно нужно сделать вывод, я записываю его в виде схемы, к которой постоянно возвращаюсь при решении уравнений

- 1) Если a≠0, то уравнение имеет единственный корень: х = $\frac{b}{a}$ (ах = b; ах = b; х = b : а; х= $\frac{b}{a}$)
- 2) Если а = 0 и b = 0, то корнем уравнения $ax= b$ является любое число.
- 3) Если а = 0, b≠0, то уравнение $ax= b$ не имеет корней, хЄ Ø

Хотелось бы обратить внимание, что работу с этой теорией нельзя пропускать, переходя на конкретные примеры, т.к. она является основой для решения уравнений с параметрами

Рассмотрим решение линейных уравнений, если параметр является свободным членом.

Переменную, которую надо найти, будем называть неизвестной, а переменную, через которую будем выражать искомую неизвестную, назовем параметром.

х – а = 0; ответ: при а∈(– ∞;+∞) х = а

х+2=а+7; ответ: при а∈(– ∞;+∞) х=а+5.

5х = а; ответ: при а∈(– ∞;+∞) х = $\frac{a}{5}$

$\frac{x}{2}$ = а; ответ: при а∈(– ∞;+∞) х = 2а

|x| = а; ответ: при а∈(– ∞;+∞) х = ±а .

Вывод: если параметр является свободным членом в уравнении, то уравнение всегда имеет один корень.

Подобные упражнения помогают учащимся привыкнуть к параметру, к необычной форме ответов при решении уравнений. Замечу, что даже такие, казалось бы, совершенно элементарные уравнения часто требуют от учителя подробных комментариев и терпеливых объяснений. Важно донести до ребят, что решение уравнений с параметром – это решение ни одного уравнения, а целого блока уравнений. Другими словами, решение уравнений в общем виде. Основное, что нужно усвоить при первом «знакомстве» с параметром, это необходимость осторожного обращения с фиксированным, но неизвестным числом. Необходимость аккуратного обращения с параметром хорошо видна в примерах, где замена параметра числом делает задачу банальной.

Задачи с параметром можно условно разделить на два типа:

а) в условии сказано: решить уравнение (неравенство, систему) – это значит, для всех значений параметра найти все решения. Если хотя бы один случай остался неисследованным, признать такое решение удовлетворительным нельзя.

б) требуется указать возможные значения параметра, при которых уравнение (неравенство, система) обладает определенными свойствами. Например, имеет одно решение, не имеет решений, имеет решения, принадлежащие промежутку и т. д. В таких заданиях необходимо четко указать, при каком значении параметра требуемое условие выполняется.

Примеры:

1. При каком значении параметра *а x=2,5* является корнем уравнения *x+2=a+7*?

Решение.

Т.к. *x= 2,5* – корень уравнения *x+2=a+7*, то при подстановке *x= 2,5* в уравнение

получим верное равенство $2,5+2=a+7$, откуда находим $a=-2,5$.
Ответ: при $a=-2,5$.
2. Найти все натуральные значения *а*, при которых корень уравнения $(a-1)x=12$ является а) натуральным числом; б) неправильной дробью.
Решение:
$a\neq 1$, то так как иначе уравнение не имеет решений;
а) если $a\neq 1$, то $x=\frac{12}{a-1}$
Перебором находим:
при $a=13,\ x=1;$ при $a=7,\quad x=2;$ при $a=5,\quad x=3;$ при $a=4,\quad x=4;$ при $a=3,\quad x=6;$ при $a=2,\quad x=12.$
Ответ: а є {13, 7, 5, 4, 3, 2};
б) если $a\neq 1$, то $x=\frac{12}{a-1}$
Перебором находим, что а є {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.
3. При каких значениях *а* уравнение $(a2-1)x=a+1$
а) не имеет решений; б) имеет бесконечное множество решений; в) имеет единственный корень.
Решение:
а) данное уравнение *не имеет решений* в том случае, если коэффициент при х равен нулю, а выражение, стоящее в правой части уравнения не обращается в нуль, то есть
$\begin{cases} a^2-1=0, \\ a+1\neq 0; \end{cases}$ откуда имеем $a=1$.
Т.о., *при а=1 уравнение не имеет решений.*
б) данное уравнение *имеет бесконечное множество решений* в том случае, если коэффициент при *x* равен нулю и выражение, стоящее в правой части уравнения, обращается в нуль, то есть $\begin{cases} a^2-1=0, \\ a+1=0; \end{cases}$ откуда $a=-1$.
Т.о., *при а=-1 уравнение имеет бесконечное множество решений.*
в) уравнение имеет *единственное решение*, при $a2-1\neq 0$, то есть $(a-1)(a+1)\neq 0$, т.е. $a\neq\pm 1$.
Ответ:

1. Уравнение не имеет решений, при $a=1$.
2. Уравнение имеет бесконечное множество решений, при $a=-1$.
3. Уравнение имеет единственный корень, при $a\neq\pm 1$.

Примеры заданий 2 типа
1. Решить уравнение ax=1.
Решение. На первый взгляд представляется возможным сразу дать ответ: $x=\frac{1}{a}$; Однако, при $a=0$ данное уравнение решений не имеет и верный *ответ* записывается так:
если $a=0$, то *нет решений*; если $a\neq 0$, то $x=\frac{1}{a}$
2. Решить уравнение $ax+8=a$.
Решение. Запишем уравнение в стандартном виде $ax=a-8$.
Основа правильного решения задач с параметрами состоит в грамотном разбиении области изменения параметра, к этому надо приучать путем подробного описания хода решения.
Итак, коэффициент при *x* равен *а*. Возникают *два* возможных случая:
коэффициент при *x* равен *нулю* и уравнение примет вид $0x=-8$, полученное уравнение *не имеет корней*;
коэффициент при *x не* равен *нулю*, и мы имеем право разделить обе части уравнения на этот коэффициент: $a\neq 0,$

$ax=a-8, \; x = \frac{a-8}{a}$

Ответ: при *a=0, нет корней*;

при $a \neq 0, \quad x = \frac{a-8}{a}$

Важно зафиксировать внимание учащихся на случае, когда коэффициент при *x* равен нулю, и рассматривать этот случай всегда первым, чтобы помочь учащимся избежать наиболее распространенной ошибки, когда этот случай теряют.