Стереометрическая задача «Угол между скрещивающимися прямыми»

в заданиях единого государственного экзамена

Михайлова Ольга Владимировна, учитель математики

МАОУ «Центр образования №1» г. Белгорода

имени героя РФ А.Г. Копейкина

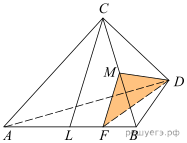
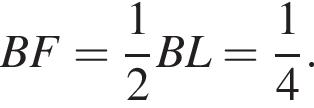
В предлагаемой разработке представлены наиболее трудные задания по стереометрии, используемые на ЕГЭ по математике в последние годы. Рассмотрены основные методы и приемы их решений. Даны подробные решения с пояснениями и комментариями к каждой задаче и ответы.

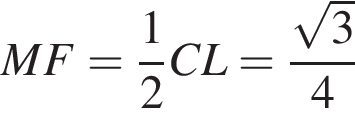
Разработка предназначено для учителей и методистов с целью организации углубленной подготовки выпускников школ к ЕГЭ по математике, будет полезно также учащимся 10-11 классов, желающим самостоятельно познакомиться с основными приемами и методами решения задач высокого уровня. Цель данной работы – дать возможность учащимся 10-х, 11-х классов потренироваться в выполнении таких видов заданий, которые включаются в ЕГЭ, проверить себя по темам школьного курса и подготовиться к предстоящей итоговой аттестации. Разобравшись с предложенным решением конкретного задания, попытайтесь его воспроизвести, подумайте, нет ли решения рациональнее.

**1.**Длина ребра правильного тетраэдра *ABCD* равна 1. *M* — середина ребра *BC, L* — середина ребра *AB.*

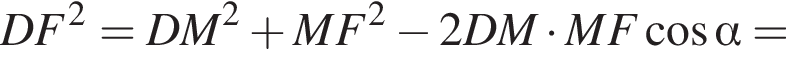
а) Докажите, что плоскость, параллельная прямой *CL* и содержащая прямую *DM*, делит ребро *AB* в отношении 3 : 1, считая от вершины *A*.

б) Найдите угол между прямыми *DM* и *CL*.

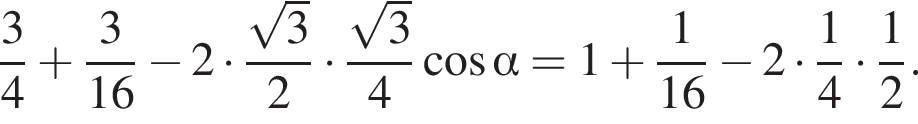
**Решение.**а) Пусть *MF* прямая параллельная прямой *CL* и *F* точка ее пересечения с *AB.* Тогда плоскость *DMF* параллельна прямой *CL* по признаку параллельности прямой и плоскости. *MF* — средняя линия треугольника *BCL,* поэтому:  Это и требовалось доказать.

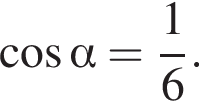
б) Искомый угол между прямыми *DM* и *CL* равен углу *DMF.* Обозначим угол *DMF* буквой α. 

Выразим квадрат отрезка *DF* по теореме косинусов в двух треугольниках: *DMF* и *BDF*:


Поскольку  и BD=1, подставляя числовые данные, получим:



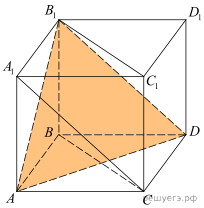
Откуда 

Ответ: 

**2.**Сторона основания правильной треугольной призмы *ABCA*1*B*1*C*1 равна 8. Высота этой призмы равна 6.

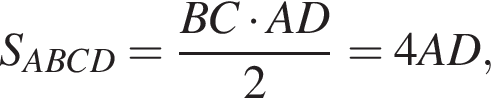
а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую *AB*1 и параллельная прямой *CA*1 проходит через середину ребра *BC*.

б) Найти угол между прямыми *CA*1 и *AB*1.

**Решение.**Достроим треугольную прямую призму до четырехугольной прямой призмы, в основании которой ромб *ABDC*, составленный из двух равносторонних треугольников.

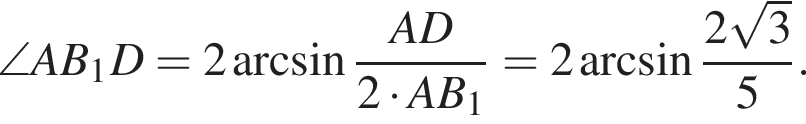
Полученная призма является прямым параллелепипедом. Поэтому B_1D\parallel A_1C.

а) Плоскость AB_1D параллельна прямой  A_1C по признаку параллельности. Диагонали ромба *ABDС* пересекают друг друга посередине, поэтому плоскость AB_1D проходит через середину ребра *BC*.

б) B_1D\parallel A_1C, значит, искомый угол AB_1D. Рассмотрим ромб *ABDC*: площадь ромба равна произведению квадрата его стороны на синус угла ромба  С другой стороны, площадь ромба можно найти как полупроизведение длин его диагоналей:  следовательно, 

Из прямоугольного треугольника AA_1B_1 по теореме Пифагора находим: AB_1=10. Аналогично, B_1D=10. Значит, из равнобедренного треугольника

AB_1D, получаем



**Примечание 1.**

Диагональ ромба можно было найти по теореме косинусов для треугольника *ABD*.

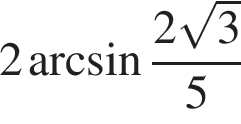
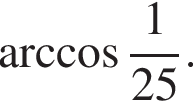
**Примечание 2.**

Для нахождения угла AB_1D можно применить в треугольнике AB_1D теорему косинусов:



 равносильно 64 умножить на 3=100 плюс 100 минус 2 умножить на 10 умножить на 10 умножить на косинус \angleAB_1D равносильно   

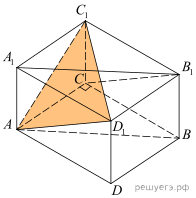

откуда \angleAB_1D= арккосинус 0,04.

Ответ:  или 

**3.**В основании прямой призмы *ABCA*1*B*1*C*1 лежит равнобедренный прямоугольный треугольник *ABC* с гипотенузой *AB*, равной  Высота призмы равна 6.

а) Докажите, что плоскость, содержащая прямую *AC*1 и параллельная прямой *CB*1 проходит через середину ребра *A*1*B*1.

б) Найдите угол между прямыми *AC*1 и *CB*1.

**Решение.**Достроим призму до прямоугольного параллелепипеда с основанием *ACBD* и верхним основанием A_1C_1B_1D_1.

а) Прямая AD_1 параллельна прямой CB_1, поэтому плоскость C_1AD_1 || CB_1. A_1C_1B_1D_1 — прямоугольник, поэтому его диагонали пересекают друг друга посередине, значит, плоскость C_1AD_1 проходит через середину ребра A_1B_1.

б) Прямая AD_1 параллельна прямой CB_1, поэтому искомый угол C_1AD_1. Из прямоугольного треугольника *ACB* находим: AC=8. Значит, *AD* тоже равно 8. Из прямоугольных треугольников ACC_1 и ADD_1 получаем: AC_1=AD_1=10, а диагональ C_1D_1 квадрата A_1C_1B_1D_1 равна  Из равнобедренного треугольника C_1AD_1 получаем:

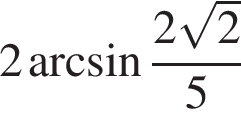


**Примечание.**

Для нахождения угла можно воспользоваться теоремой косинусов:

  
 равносильно 128=100 плюс 100 минус 2 умножить на 10 умножить на 10 умножить на косинус \angle C_1AD_1 равносильно 

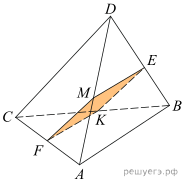


Ответ:  или 

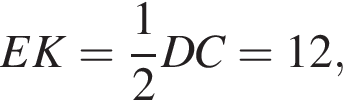
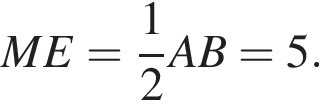
**4.**В пирамиде *DABC* прямые, содержащие ребра *DC* и *AB*, перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку *E* — середину ребра *DB*, и параллельно *DC* и *AB*. Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

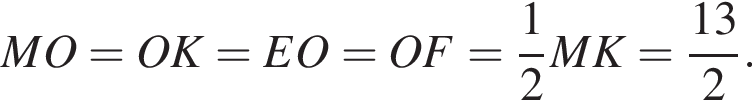
б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если *DC* = 24, *AB* = 10.

**Решение.**а) Построим прямые EK, EM, KF, такие что: EK\parallel DC,EM\parallel AB, KF\parallel AB, тогда MF\parallel DC искомое сечение параллелограмм EKFM. Покажем, что *EKFM* прямоугольник:

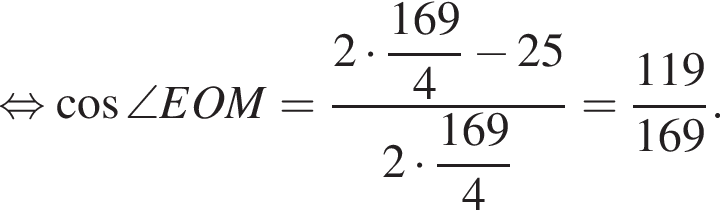
EM \parallel AB,EK \parallel DC,DC \perp AB \Rightarrow EM \perp EK.

б) Заметим, что EK\parallel DC и *E* — середина *DB*, тогда *EK* — средняя линия треугольника DBC. Значит,  аналогично  Так как *EKMF* прямоугольник, получаем:

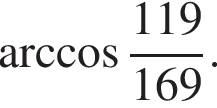


Пусть прямая *MK* пересекает прямую *EF* в точке *O*, тогда: 

Заметим, что EM меньше EK (чтобы косинус в ответе получился положительным, а полученный угол —острым). Применим теорему косинусов в треугольнике  EOM:

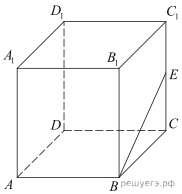
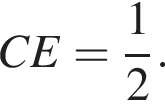
Откуда 

Ответ: 

**5.**Точка *E* — середина ребра *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1.

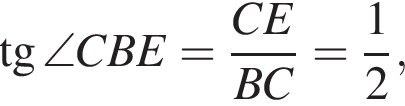
а) Докажите, что угол между прямыми *BE* и *AD* равен углу *CBE*.

б) Найдите угол между прямыми *BE* и *AD*.

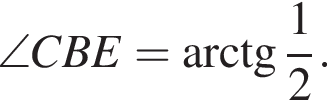
**Решение.**Примем ребро куба за единицу. Тогда 

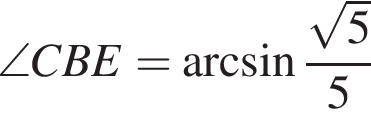
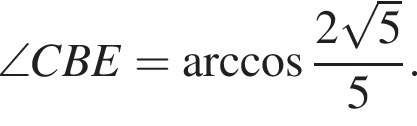
а) Прямая *AD* параллельна прямой *BC*, значит, искомый угол равен углу *CBE.*

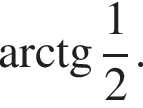
б) Из прямоугольного треугольника *CBE* с прямым углом *C* имеем:



тогда



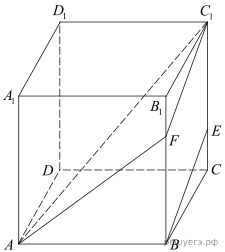
Ответ также может быть представлен в следующем виде:  или 

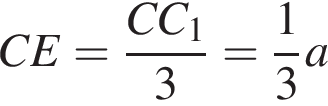
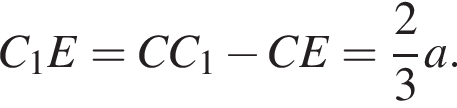
Ответ: 

**6.**На ребре *CC*1 куба *ABCDA*1*B*1*C*1*D*1 отмечена точка *E* так, что *CE* : *EC*1 = 1 : 2.

а) Пусть точка *F* делит ребро *BB*1 в отношении 1 : 2, считая от вершины *B*1. Докажите, что угол между прямыми *BE* и *AC*1 равен углу *AC*1*F*.

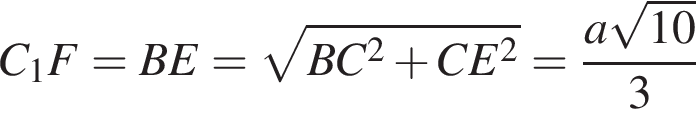
б) Найдите угол между прямыми *BE* и *AC*1.

**Решение.**Примем ребро куба за a. Тогда 

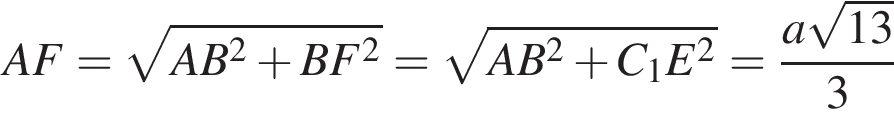
Поскольку CE:EC_1=1:2, получаем:  и 

а) Проведем через точку C_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает ребро BB_1 в точке *F*, причем треугольники *BCE* и C_1FB_1 равны. Искомый угол равен углу AC_1F (или смежному с ним).

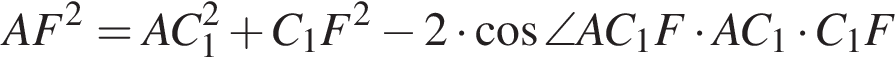
б) В прямоугольном треугольнике C_1FB_1 с прямым углом B_1 имеем:



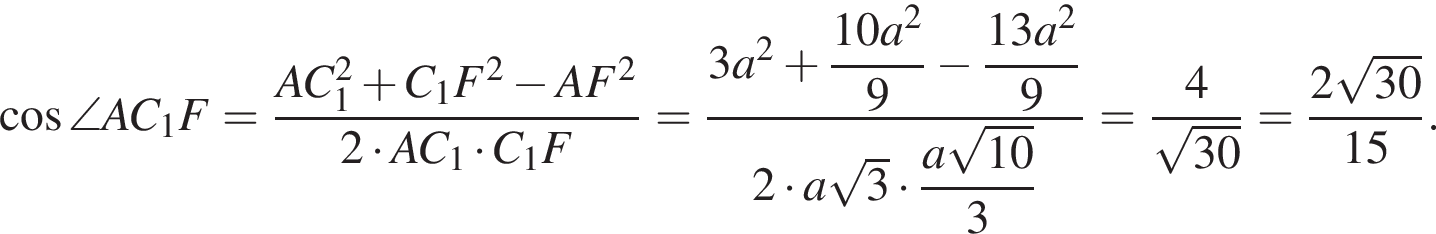
В прямоугольном треугольнике *ABF* с прямым углом *B* имеем:

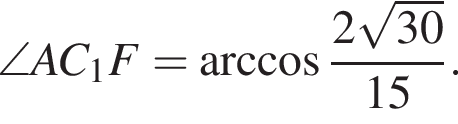


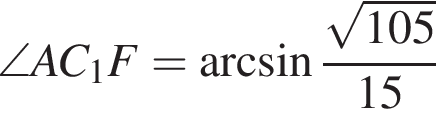
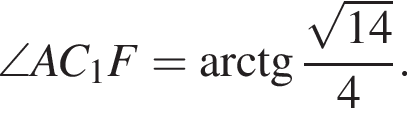
В треугольнике AC_1F получаем:

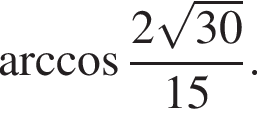


откуда



Тогда 

Ответ может быть представлен и в другом виде:  или 

Ответ: 

***Литература***.

1. Открытый банк заданий ЕГЭ по математике (электронный ресурс). [www.mathege.ru](http://www.mathege.ru)
2. Д. А. Мальцев, А. А. Мальцев, Л. И. Мальцева. Все для ЕГЭ 2020. Книга 1. Школьные технологии. Москва, 2020.
3. ФИПИ. ЕГЭ 2022. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся.
4. А.Г.Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра и начала анализа. 10, класс.
5. А.Г.Мордкович, П.В. Семенов. Алгебра и начала анализа. 11, класс.