**Содержание**

Введение…………………………………………………………………….…………..…3

Пояснительная записка…………………………………………………………………...4

Перечень тем практических работ…………………………………………………….…5

Практическая работа №1 «Производная. Правила дифференцирования……..……....6

Практическая работа №2 «Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл»………………………………………………………………………………....14

Практическая работа №3 «Множества и отношения»……..……...………..…………22

Практическая работа №4 «Матрицы и определители» …………………….……..…..26

Практическая работа №5 «Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными» ………………………………………………………………………..…32

Практическая работа №6 «Комплексные числа. Решение упражнений» …………...40

Практическая работа №7 «Элементы теории вероятностей. Случайная величина» .44

**Введение**

Данная работа содержит методические указания к практическим работам по дисциплине «Математика» и предназначена для обучающихся I курса специальности «Земельно-имущественные отношения».

Цель разработки: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по предмету «Математика».

**Пояснительная записка**

Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на занятиях теоретического обучения, а так же для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на занятиях, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания. К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием. Вопросы, необходимые при подготовке, студент получает перед занятием из методических рекомендаций к практическому занятию.

Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой.

Зачет по каждой практической работе студент получает после её выполнения и предоставления в письменном, печатном или электронном виде, оформления отчета в котором указывает полученные знания и умения в ходе выполнения практической работы, а также ответов на вопросы преподавателя, если таковые возникнут при проверке выполненного задания.

**Перечень тем практических работ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Название разделов, тем практических работ | Количество часов | Вид деятельности | Формы контроля |
| **Раздел 1. Математический анализ.**  Практическая работа №1. «Производная. Правила дифференцирования».  Практическая работа №2.  «Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл». | **8**  2  6 | Выполнение заданий  Выполнение заданий | Проверка выполненных заданий |
| **Раздел 2. Основы дискретной математики.**  Практическая работа №3.  «Множества и отношения». | **2**  2 | Выполнение заданий | Проверка выполненных заданий |
| **Раздел 3. Элементы линейной алгебры.**  Практическая работа №4.  «Матрицы и определители».  Практическая работа №5.  «Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными». | **6**  2  4 | Выполнение заданий | Проверка выполненных заданий |
| **Раздел 4. Основы теории комплексных чисел.**  Практическая работа №6.  «Комплексные числа.  Решение упражнений». | **2**  2 | Выполнение заданий | Проверка выполненных заданий |
| **Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики.**  Практическая работа №7.  «Элементы теории вероятностей. Случайная величина». | **2**  2 | Выполнение заданий | Проверка выполненных заданий |
| **Итого:** | **20** | - | - |

*Практическая работа №1*

**Тема: Производная. Правила дифференцирования.**

**Цель:** сформировать умение находить производные функций, заданных в явном, логарифмическом и параметрическом виде, находить производные сложных функций, знать геометрический смысл производной.

**Теоретические сведения к практической работе**

*Производной функции*  называется конечный предел отношения приращения функции  к приращению независимой переменной  при стремлении последнего к нулю:

 (1)

Обозначения производной в точке *х*0:

 и другие.

Если функция в точке *х*0 (или на промежутке *Х*) имеет конечную производную, то функция называется *дифференцируемой в этой точке* (или на промежутке *Х*).

Процесс отыскания производной называется *дифференцированием*.

###### Геометрический смысл производной.



















***N***



###### Если кривая задана уравнением , то — угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке ().

Уравнение касательной к кривой    
в точке х0 (прямая М0Т) имеет вид:

 (2)

а уравнение нормали (*М*0*N*):

 (3)

*Правила дифференцирования*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | *U* = *u*(*x*), *V*=*V*(*x*) —  дифференцируемые функции | № пп | *U* = *u*(*x*), *V*=*V*(*x*) —  дифференцируемые функции |
| **I** |  | **VI** | Производная сложной функции |
| **II** |  | **VII** | Функция задана параметричес-кими уравнениями |
| **III** |  |
| **IV** |  | **VIII** | Если  и  — взаимно обратные функции,  то |
| **V** |  |

*Формулы дифференцирования основных элементарных функций*

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № пп | *с*=const, *х* — независимая переменная,  *u* = *u*(*x*) — диф­ференцируемая функция | | |
| **1** | *С*’= 0 | **9** |  |
| **2** | *x*’= 1 | **10** |  |
| **3** |  | **11** |  |
| **4** |  | **12** |  |
| **5** |  | **13** |  |
| **6** |  | **14** |  |
| **7** |  | **15** |  |
| **8** |  |  |  |

*Производной n-го порядка* называется производная от производной (*n*–1)-го порядка. Производные высших порядков вычисляются последовательным дифференцированием данной функции.

Производная второго порядка  или 

Производная третьего порядка  или  и т. д.

*Пример 1*. Найти производные функций:

*а*)  *б*)  *в*)  *г*) 

*Решение*.

*а*) Используя правила I, III и формулу (3), получим:



*б*) Используя правила дифференцирования произведения функций II, разности I, формулы (5), (7), (8) и учитывая, что независимая переменная есть *t*, т. е. *t*=1, получим:



*в*) Сложная степенная функция, независимая переменная есть *v*,   
т. е. *v*=1; используя формулу (3), получим:



*г*) Используя правила дифференцирования частного IV, суммы I, III   
и формулы (3), (14), учитывая, что *t*=1, получим:



*Пример 2*. Составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке с абсциссой *х*0=2.

Используем уравнения касательной (2) и нормали (3):

1) 

2) 



Подставим  в уравнения и получим: 

или  — уравнение касательной.

 или — уравнение нормали.

*Пример 3.* Найти производную , если функция задана парамет-рически: 

Используем правило VII 





*Пример 4*. Найти дифференциалы функций:

*а*)  *б*)  *в*) 

Для дифференциала функции  справедлива формула  т. е. дифференциал функции равен произведению производной от функции на дифференциал независимой переменной.

*Решение*.

*а*) 

*б*) 

*в*) 

*Пример 5.* Найти производную второго порядка функции 

*Решение*.  поэтому найдём производную первого порядка,   
а затем второго.





*Пример 6*. Найти производную функции  логарифмическим дифференцированием



**Содержание практической работы**

**Задание 1**. Найти производные 1-го порядка данных функций

1)  

2) 3)  

4) 

5) 

6)  

**Задание 2**. Составить уравнение касательной и нормали к кривой *y*=*f*(*x*) в точке с абсциссой *х*0.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

**Задание 3**. Найти производную  функции *y*=*у*(*x*), заданной параметрически: 

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6)

**Задание 4**. Найти дифференциалы функций:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

**Задание 5**. Найти производную второго порядка функции y=f(x).

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

*Практическая работа №2*

**Тема: Интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл.**

**Цель:** сформировать умение вычислять неопределенные и определенные интегралы, используя различные методы интегрирования.

**Теоретические сведения к практической работе**

Функция , определенная на интервале , называется *первообразной* для функции , определенной на том же интервале , если 

Если  — первообразная для функции , то любая другая первообразная для функции  отличается от  на некоторое постоянное слагаемое, т. е.  где .

*Неопределенным интегралом* от функции  называется совокупность всех первообразных для этой функции. Обозначается неопределенный интеграл:  где 

Операция нахождений первообразной для данной функции называется *интегрированием*. Интегрирование является обратной операцией к дифференцированию:



Для проверки правильности выполненного интегрирования необходимо продифференцировать результат интегрирования и сравнить полученную функцию с подынтегральной.

Свойства неопределенного интеграла:

1. 

2. 

3. 

4. 

*Таблица основных интегралов*

1.  2. 

3.  

4.  5. 

6.  7.

8.  9. 

10.  11. 

12.  13. 

14.  15. 

16.  17. 

18. 

Каждая из приведенных в таблице формул справедлива на промежутке, не содержащем точек разрыва подынтегральной функции. Вычисление интегралов с использованием таблицы и основных свойств называют непосредственным интегрированием.

*Пример 1.* Пользуясь таблицей основных интегралов и свойствами неопределенного интеграла, найти интегралы (результат интегрирования проверить дифференцированием):

*Решение.*

 *Проверка:*





*Проверка:*





*Метод замены переменной*

*Теорема 1.* Пусть монотонная, непрерывно дифференцируемая функция, тогда

 (1)

При этом, если  то  где — функция, обратная .

Формула (1) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле.

*Алгоритм замены переменной:*

1) Связать старую переменную интегрирования  с новой переменной  с помощью замены .

2) Найти связь между дифференциалами .

3) Перейти под знаком интеграла к новой переменной.

4) Проинтегрировать и в полученной первообразной вернуться к старой переменной, подставив 

*Пример 2.* Проинтегрировать подходящей заменой переменной.

**  **

*Решение:*







*Определенный интеграл, его вычисление и свойства*

*Определенный интеграл*от функции, непрерывной на отрезке , вычисляется по формуле:

 (2)

где — первообразная для функции , т. е. 

Формула (2) называется *формулой Ньютона — Лейбница.*

*Свойства определенного интеграла*:







6) Если  для всех , то 

7) Если  для всех , то 

*Пример 3.* Вычислить определенный интеграл 

*Решение.*



**Содержание практической работы**

**Задание 1**. Вычислить интегралы.

1)  

2)  

3)  

4)  

5)  

6)  

**Задание 2**. Проинтегрировать подходящей заменой переменного.

1)   

2)   

3)   

4)   

5)   

6)   

**Задание 3**. Вычислить определенный интеграл.

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

*Практическая работа №3*

**Тема: Множества и отношения.**

**Цель:** сформировать умение выполнять операции с множествами.

**Теоретические сведения к практической работе**

Множество – одно из основным понятий математики.

Множеством называется совокупность некоторых элементов, объединенных каким-либо общим признаком. Элементами множества могут быть числа, фигуры, предметы, понятия и т.п.

Множества обозначаются прописными буквами, а элементы множество строчными буквами. Элементы множеств заключаются в фигурные скобки.

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают x ∈ Х (∈ — принадлежит).

Если множество А является частью множества В, то записывают А ⊂ В (⊂ — содержится).

Множество может быть задано одним из двух способов: перечислением и с помощью определяющего свойства.

Два множества А и В равны (А=В), если они состоят из одних и тех же элементов.

Например, если А={1,2,3,4}, B={3,1,4,2} то А=В.

Объединением (суммой) множеств А и В называется множество А ∪ В, элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств.

*Например*, если А={1,2,4}, B={3,4,5,6}, то А ∪ B = {1,2,3,4,5,6}

Пересечением (произведением) множеств А и В называется множество А ∩ В, элементы которого принадлежат как множеству А, так и множеству В.

*Например*, если А={1,2,4}, B={3,4,5,2}, то А ∩ В = {2,4}

Разностью множеств А и В называется множество АВ, элементы которого принадлежат множесву А, но не принадлежат множеству В.

*Например*, если А={1,2,3,4}, B={3,4,5}, то АВ = {1,2}

Симметричной разностью множеств А и В называется множество А Δ В, являющееся объединением разностей множеств АВ и ВА, то есть А Δ В = (АВ) ∪ (ВА).

*Например*, если А={1,2,3,4}, B={3,4,5,6}, то А Δ В = {1,2} ∪ {5,6} = {1,2,5,6}

*Свойства:*

Свойства перестановочности:

A ∪ B = B ∪ A

A ∩ B = B ∩ A

Сочетательное свойство:

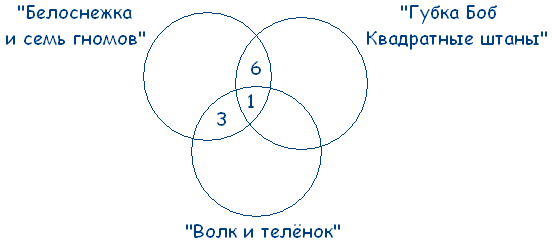
(A ∪ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C)

(A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)

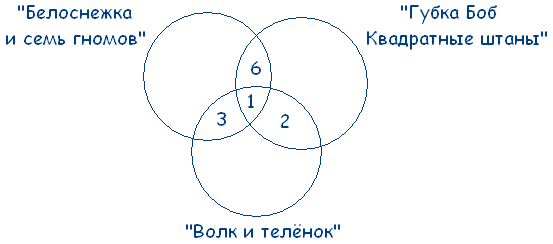
Круги Эйлера (Эйлера-Вена) — геометрическая схема, с помощью которой можно изобразить отношения между подмножествами, для наглядного представления.

*Пример*: Среди школьников шестого класса проводилось анкетирование по любимым мультфильмам. Самыми популярными оказались три мультфильма: «Белоснежка и семь гномов», «Губка Боб Квадратные Штаны», «Волк и теленок». Всего в классе 38 человек. «Белоснежку и семь гномов» выбрали 21 ученик, среди которых трое назвали еще «Волк и теленок», шестеро – «Губка Боб Квадратные Штаны», а один написал все три мультфильма. Мультфильм «Волк и теленок» назвали 13 ребят, среди которых пятеро выбрали сразу два мультфильма. Сколько человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны»?

*Решение*: В этой задаче 3 множества, из условий задачи видно, что все они пересекаются между собой. Получаем такой чертеж:



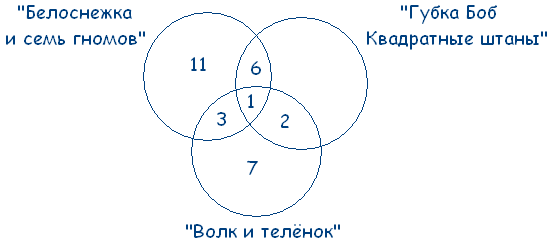
Учитывая условие, что среди ребят, которые назвали мультфильм «Волк и теленок» пятеро выбрали сразу два мультфильма, получаем:



21 – 3 – 6 – 1 = 11 – ребят выбрали только «Белоснежку и семь гномов».

13 – 3 – 1 – 2 = 7 – ребят смотрят только «Волк и теленок».

Получаем:



38 – (11 + 3 + 1 + 6 + 2 + 7) = 8 – человек смотрят только «Губка Боб Квадратные Штаны».

Делаем вывод, что «Губка Боб Квадратные Штаны» выбрали 8 + 2 + 1 + 6 = 17 человек.

Ответ. 17 человек выбрали мультфильм «Губка Боб Квадратные Штаны».

**Содержание практической работы**

**Задание 1**. 1) Найти множества А∩В, АUВ, А/В, В/А, если:

а) А={е, о, р, х} В={х, у}

б) А={х: -3<х<4} В={х: 0≤х≤6}

в) А={2n+1}, B={n+1} nєN

2) Найти множества А∩В, АUВ, А/В, В/А, если:

а) А={12, 13, 14, 15} В={12, 14, 16}

б) А={х: 0<х<2} В={х: 1≤х≤4}

в) А={3-(n+1)}, B={n+5} nєN

**Задание 2**. 1) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) только один язык?

б) испанский язык?

в) только немецкий язык?

г) знают английский и немецкий, но не знают французский?

2) На 1 курсе учатся 200 студентов, 106 из них знают английский язык, 60 – немецкий, 92 – французский. 24 студента знают английский и немецкий языки, 36 – английский и французский, 30 – немецкий и французский, 14 – все три языка. Остальные знают только один испанский язык. Сколько студентов знают:

а) ровно два языка?

б) только французский язык?

в) знают немецкий и французский, но не знают английский?

г) не знают испанский язык?

*Практическая работа №4*

**Тема: Матрицы и определители.**

**Цель:** сформировать умение выполнять арифметические действия с матрицами, находить определители матриц.

**Теоретические сведения к практической работе**

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из *m* строк и *n* столбцов, которую записывают в следующем виде:

.

Для обозначения матрицы используют прописные латинские буквы, для обозначения элементов матрицы – строчные латинские буквы с указанием номера строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Запись « матрица *B* имеет размер *m*x*n*» означает, что речь идет о матрице, состоящей из *m* строк и *n* столбцов. Например, матрица  имеет размер *2*x*3*. Далее, *bij* - обозначение элемента, стоящего на пересечении *i*-й строки и *j-*го столбца данной матрицы (в примере *b23=5)*.

При ссылке на *i-ю* строку матрицы *A* используют обозначение *Ai*, при ссылке на *j-й* столбец – обозначение *Aj*.

Матрица, у которой число строк совпадает с числом столбцов, называется *квадратной*. Элементы *a11 , a22 ,…, ann* квадратной матрицы *A* (размера *n*x*n)* образуют *главную диагональ*. Квадратная матрица, у которой отличные от нуля элементы могут стоять только на главной диагонали, называется *диагональной.* Диагональная матрица, у которой все элементы (главной диагонали!) равны 1, называется *единичной.* Наконец, квадратная матрица, у которой ниже (выше) главной диагонали находятся только нули, называется *верхней (нижней)* *треугольной матрицей*. Например, среди квадратных матриц размера *3*x*3*

, , , 

матрица *A* является верхней треугольной, *B* – диагональной, *C* – нижней треугольной, *E* – единичной.

Матрицы *A, B* называются *равными* (*A=B*), если они имеют одинаковый размер, и их элементы, стоящие на одинаковых позициях, совпадают.

*Арифметические действия с матрицами.*

Чтобы *умножить матрицу A на отличное от нуля вещественное число k,* необходимо каждый элемент матрицы умножить на это число:

.

Чтобы найти *сумму матриц* *A, B* одной размерности, необходимо сложить элементы с одинаковыми индексами (стоящие на одинаковых местах):

.

*Пример 1.* Найти *2A-B*, если , .

*Решение.* Сначала умножаем матрицу *A* на число «2», затем матрицу *B* на число «-1», и, наконец, находим сумму полученных матриц:



Имеем: 



*Произведение* *AB* можно определить только для матриц *A* размера *m*x*n* и *B* размера *n*x*p*, при этом *AB=C*, матрица *C* имеет размер *m*x*p,* и ее элемент *cij* находится как скалярное произведение *i-й* строки матрицы *A* на *j-й* столбец матрицы *B:  (i=1,2,…,m; j=1,2,…,p).* Фактически необходимо каждую строку матрицы *A* (стоящей слева)умножить скалярно на каждый столбец матрицы *B* (стоящей справа).

*Пример 2.* Найти произведение матриц  и .

*Решение.* Размер матрицы *A* *3*x*2*, матрицы *В 2*х*2*. Поэтому произведение *АВ* найти можно, произведение *ВА* – нет. Действуя по сформулированному выше правилу, получаем:



Матрицей, *транспонированной* к матрице *A* размера *m*x*n,* называется матрица *AT* размера *n*x*m,* строки которой являются столбцами исходной матрицы.

Например, если , то .

*Пример 3.* Найти .

*Решение.* Воспользовавшись вычислениями, проведенными при решении примера, а также правилами умножения матрицы на число и сложения матриц, получим:

.

Матрицы A, B называются *эквивалентными*, если одна получена из другой путем элементарных преобразований.

*Рангом* матрицы *A* в дальнейшем будем считать число строк эквивалентной ей ступенчатой матрицы, используя обозначение  *r(A).* Так, в рассмотренном выше примере 3.4 *r(A)=3, r(B)=2.* Можно доказать, что ранг матрицы *A* (размера *m*x*n*) не может быть больше  (например, для матрицы *А* размера *2*x*3 *). Кроме того, ранг матрицы не зависит ни от выбора ведущих элементов, ни от проводимых преобразований. Это свойство можно использовать при проверке. Так, в примере 3.4 после перестановки первой и второй строки в матрице *B* можно в качестве ведущего сначала рассмотреть элемент *b12*, а затем вычеркнуть третью строку, пропорциональную второй ():



*Вычисление определителей.* Определитель матрицы *A* размера *2*x*2* (определитель 2-го порядка) – это число, которое можно найти по правилу:



(произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы, минус произведение элементов, стоящих на побочной диагонали).

Определитель матрицы *A* размера *3*x*3*  (определитель 3-го порядка) – число, вычисляемое по правилу *«раскрытие определителя по первой строке»:*



*Пример 4.* Найти: 

*Решение.* При нахождении определителя воспользуемся сначала формулой , а затем (для вычисления определителей 2-го порядка) формулой .

**Содержание практической работы**

**Задание 1**. Выполнить арифметические действия с матрицами:

1) ; 2) ;

3) ; 4) ;

5)  ;

6);

7) 

**Задание 2**.Доказать равенство *(AB)C=A(BC)* для матриц:

**1)** , , ;

**2)** , , ;

3) , , ;

**Задание 3**.Найти: 1) ; 2) ; 3) .

**Задание 4**. Вычислить определители:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1) ; | 2) ; | 3) |
| 4) ; | 5) ; | 6) |
| 7) ; |  |  |

*Практическая работа №5*

**Тема: Системы линейных уравнений с двумя и тремя неизвестными.**

**Цель:** сформировать умение исследовать и использовать различные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений.

**Теоретические сведения к практической работе**

Рассмотрим системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) произвольной размерности, состоящие из *m* уравнений с *n* неизвестными:

. (\*)

Матрица , составленная из коэффициентов системы (\*), называется матрицей системы (ее размер – *m*x*n*), а вектор  (*m*-мерный)- столбцом (вектором) свободных членов. Матрицу вида  называют расширенной матрицей системы (\*). Любой набор значений неизвестных , образующих *n*-мерный вектор , является решением системы (\*), если эти числа удовлетворяют всем уравнениям системы (т.е. превращают их в тождества). Очевидно, что  при каждом *i=1,2,…,m* (*i-е* уравнение представляет собой скалярное произведение *i-й* строки матрицы системы на вектор *X*), и (\*) можно переписать в виде

. (\*\*)

Запись (\*\*) называется "матричной (векторной) формой записи" системы (\*).

*Пример 1*. Выписать матрицу коэффициентов и столбец свободных членов для СЛАУ .

*Решение*. Очевидно, что ; .

*Пример 2*. Записать СЛАУ, если , .

*Решение.* Введем в рассмотрение вектор *X* и с каждым столбцом мысленно сопоставим неизвестное: с первым столбцом - , со вторым - , с третьим - , с четвертым - . Окончательно нужная система линейных алгебраических уравнений имеет вид

.

*Классификация систем линейных алгебраических уравнений.* Определения и основные теоремы. Если СЛАУ (\*) имеет хотя бы одно решение, она называется *совместной* (соответственно, система *несовместная*, если она вообще не имеет решений). Совместная система (\*) называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения (в последнем случае у нее бесконечно много решений).

Матрицу системы (\*) будем называть *приведенной* (а саму систему *канонической*), если в каждой *i-й* строке *(i=1,2,…,m)* есть элемент , а все остальные элементы *j-го* cтолбца равны нулю. Такие элементы (и соответствующие им неизвестные) будем называть *ведущими,* а оставшиеся неизвестные назовем *свободными*.

*Теорема 1 (Кронекера-Капелли)*. СЛАУ (\*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы совпадает с рангом ее расширенной матрицы, т.е выполняется равенство .

Для совместной системы число  назовем рангом системы.

*Теорема 2 (о количестве решений)*. Пусть СЛАУ (\*) совместна. Если ее ранг равен числу неизвестных (), то система является определенной; если ранг системы меньше числа неизвестных (), то исходная система – неопределенная.

Неопределенная система, как было отмечено, имеет бесконечное множество решений. Совокупность всех решений называется *общим решением системы.*

*Алгоритм метода Гаусса.* Цель рассуждений – путем элементарных преобразований свести исходную систему к равносильной, решение которой можно выписать непосредственно. Основными шагами метода Гаусса являются следующие.

I. *Прямой ход.* Выписать расширенную матрицу системы, путем элементарных преобразований свести ее к эквивалентной ступенчатой и определить ранги матрицы и расширенной матрицы системы. Если они различны, то исходная система несовместна, т.е. не имеет решений. Если , то переходим к следующему этапу.

II. Сравнить ранг системы и число неизвестных, сделать вывод о количестве решений, учитывая теорему 2.

III. *Обратный ход*. Ступенчатую матрицу преобразовать к эквивалентной ей приведенной. Определить, какие неизвестные являются ведущими, какие – свободными.

IV. Выписать по полученной матрице систему, записать ответ (выразив, в случае неопределенной системы, ведущие элементы через свободные для построения общего решения).

*Пример 3*. Решить СЛАУ .

*Решение*. Преобразуем расширенную матрицу системы:



Последняя матрица – ступенчатая. Ведущими неизвестными для нее являются  в первой строке,  во второй и  в третьей. Очевидно, что система совместна и ее ранг равен 3: . Поскольку число неизвестных также равно 3, исходная система является определенной.

Переходим к проведению преобразований по обратному методу Гаусса (теперь необходимо получать нули НАД ведущими элементами).



Теперь составляем по последней матрице систему  и выписываем значения неизвестных в порядке их номеров: *X=(3;1;1)T.* Это и есть ответ.

*Пример 4*. Для СЛАУ найти общее и два частных решения.

*Решение*. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой.



Очевидно, что , число неизвестных *n=4* и в соответствии с теоремой 6.2 исходная система является неопределенной. Ведущие неизвестные:  в первой строке,  во второй,  в третьей. Свободное неизвестное - . Обратным ходом преобразуем матрицу к приведенному виду:



Выписываем полученную систему и ведущие неизвестные выражаем через свободные: . Общее решение записываем в порядке нумерации неизвестных: ,  - любое вещественное число.

Частное решение можно получить, если придать свободному неизвестному  конкретное числовое значение. Например, при  , а при  .

*Теорема Крамера.* Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

. (\*)

*Теорема 3 (теорема Крамера)*. Если определитель матрицы системы (\*) отличен от нуля (), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

, *i=1,2,…,n*

где - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены *i-го* столбца на столбец свободных членов.

*Пример 5.* Решить систему  методом Крамера.

*Решение.* Выписываем *A* - матрицу системы и *B* - столбец свободных членов: , . Далее вычисляем определители:

;

;

;

.

По теореме Крамера ; ; . Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: , , . Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

**Содержание практической работы**

**Задание 1**.По расширенной матрице выписать СЛАУ.

|  |  |
| --- | --- |
| **1)** | **2)** |
| **3)** | **4)** |

**Задание 2**. Решить системы уравнений методом Крамера и методом Гаусса.

|  |  |
| --- | --- |
| **1)** | **2)** |
| **3)** | **4)** |

**Задание 3**. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

|  |  |
| --- | --- |
| **1)** | **2)** |
| **3)** | **4)** |
|  |  |

*Практическая работа №6*

**Тема: Комплексные числа. Решение упражнений.**

**Цель:** сформировать умение выполнять арифметические действия с комплексными числами.

**Теоретические сведения к практической работе**

*Комплексное число* – это выражение вида

, (1.1)

где *x, y* – вещественные числа, а  – *мнимая единица*. Первое из вещественных чисел, *x*, называется *вещественной (действительной) частью* комплексного числа (используется обозначение ); второе, *y*, - *мнимой частью* (). Выражение (1.1) называют *алгебраической формой записи комплексного числа*.

Числом, *сопряженным* к , называют число вида . Используя формулу разности квадратов, получаем, что . Можно доказать, что корнями квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом являются два сопряженных комплексных числа.

*Пример 1*. Решить уравнение .

*Решение*. Дискриминант данного уравнения:  меньше нуля, но теперь мы можем воспользоваться мнимой единицей:

, т.е. ; .

Справедливы следующие *правила арифметических действий над комплексными числами*  и :

1)  (осуществляется сложение или вычитание алгебраических двучленов и приведение подобных);

2)  (осуществляется перемножение алгебраических двучленов и приведение подобных с учетом того, что );

3)  (эта операция возможна только в случае, когда ).

*Пример 2*. Вычислить и указать вещественную и мнимую части полученного комплексного числа.

*Решение*. Действуя в соответствии с правилами получаем:

;

поэтому , .

*Тригонометрическая форма комплексного числа.* Каждому комплексному числу вида (1.1) можно поставить в соответствие точку *M(x;y)* на декартовой плоскости (при этом на оси *OX* располагаются вещественные числа , а на оси *OY* – чисто мнимые числа ).

*Модулем комплексного числа* назовем длину отрезка  (или расстояние от начала координат до точки *M*), т.е. . Аргументом комплексного числа () назовем угол, который вектор  образует с положительным направлением оси OX. Главное значение аргумента, которое, как правило, используется при осуществлении действий с комплексными числами, удовлетворяет условию . При этом выражение вида

 (1.2)

называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

Преобразуем (1.1)



и, сравнивая с (1.2), получаем, что аргумент *z* можно найти, решив систему

 или  (1.3.)

*Пример 3*. Записать комплексное число в тригонометрической форме , указать модуль и аргумент комплексного числа.

*Решение*. По определению . Для определения аргумента воспользуемся формулой: . Получаем, что . Тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид: .

*Возведение в степень и извлечение корней.* Если комплексное число задано тригонометрической формой , то справедлива формула Муавра

. (1.4)

Для извлечения корня *n*-й степени (*n* – целое число, большее 1) из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, применяется формула, дающая *n* значений этого корня:

, *k=0,1,…,n-1.* (1.5)

*Пример 4*. Вычислить: a) ; b) .

*Решение*. В задании a), чтобы воспользоваться формулой Муавра, необходимо представить комплексное число в тригонометрической форме. Имеем: ;  и , т.е.  (так как соответствующая точка лежит во второй четверти). Следовательно,  и  (в силу (1.4)). Учитывая что  и используя свойства тригонометрических функций, получаем:

.

В задании b) тригонометрическая форма заданного числа имеет вид  (*|z|=1*), поэтому в силу (1.5)

, *k=0,1,2*.

Выписываем три искомых корня:

;

;

.

**Содержание практической работы**

**Задание 1**. Вычислить, выписать вещественную и мнимую части полученных комплексных чисел.

1)  2)  3) 

4)  5)  6) 

7) 

**Задание 2**. Запишите предложенные комплексные числа в тригонометрической форме: 1) ; 2) ; 3) ; 4)  5)  6)  7) .

**Задание 3**. Найти все корни уравнений:

1) ; 2) ; 4) ; 5) ; 6)  7) 

*Практическая работа №7*

**Тема: Элементы теории вероятностей. Случайная величина.**

**Цель:** сформировать умение решать задачи на нахождение вероятностей

**Теоретические сведения к практической работе**

*Классическое определение вероятности*

Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называется теорией вероятностей.

Вероятностью Р(А) события А в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию А, к числу n всех исходов испытания.

*Пример 1*: В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

Аксиомы вероятностей:

Каждому событию А поставлено в соответствие неотрицательное число Р(А), называемое вероятностью события А.

Если события А1, А2 … попарно несовместны, то Р(А1+А2+…)=Р(А1)+Р(А2)+…

Свойства вероятностей:

Вероятность невозможного события равна нулю Р=0.

Вероятность достоверного события равна единице Р=1.

Вероятность произвольного случайного события А заключается между 0 и 1: 0<Р(А)<1.

*Пример 2*: Из 34 экзаменационных билетов, пронумерованных с помощью чисел от 1 до 34, наудачу извлекается один. Какова вероятность, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем.

*Решение:* Найдем количество чисел от 1 до 34, кратных трем. Это числа 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33. Всего таких чисел 11. Таким образом, искомая вероятность 

События А и В называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События А и В называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: Р(А+В)=Р(А)+Р(В)-Р(АВ)

*Пример 3*: Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

*Решение*: Т.к. события совместны, то 

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: Р(А+В)=Р(А)+Р(В).

Р(А)+Р()=1

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий А и В равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: Р(АВ)=Р(А)∙Р(А/В) или Р(ВА)=Р(А)∙Р(В/А)

Вероятность произведения двух независимых событий А и В равна произведению вероятностей сомножителей: Р(АВ)=Р(А)∙Р(В).

*Пример 4*: В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

*Решение*: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки



Тогда вероятность того, что обе ручки красные: 

*Формула Бернулли*

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли 

*Пример 1*: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

*Решение:*



1. Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна 

*Пример 2*: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

*Решение*:



2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m1 и не более m2 раз вычисляется по формуле 

*Пример 3*: Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении пяти независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

*Решение:*



Наивероятнейшее значение m0 числа наступления события А при проведении n повторных независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, вычисляется по формуле 

*Пример 4*: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

*Решение*:



*Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики*

Случайная величина Х – это числовая функция , определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: 

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | x1 | x2 | … | xn |
| pi | p1 | p2 | … | pn |

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины Х называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности 

Дисперсией дискретной случайной величины Х называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания . Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:





Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии .

Если случайная величина Х имеет биномиальное распределение вероятностей, то



*Пример 1*: Случайная величина Х задана таблицей распределения вероятностей. Найти М(Х), D(Х), σ(Х).

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| хi | 2 | 5 | 8 | 9 |
| рi | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

*Решение:*



*Пример 2*: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

*Решение*:



**Содержание практической работы**

**Задание 1.** Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события A того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

**Задание 2.** Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных, найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна р. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

**Задание 3.** Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:

1. Найти математическое ожидание случайной величины Х, зная закон ее распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 3 | 5 | 2 |
| рi | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.

3. Найти дисперсию случайной величины Х, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 1 | 2 | 5 |
| рi | 0,3 | 0,5 | 0,2 |

4.Найти дисперсию случайной величины Х, которая задана следующим законом распределения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| хi | 2 | 3 | 5 |
| рi | 0,1 | 0,6 | 0,3 |

5. Производится 10 независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события равна 0,6. Найти дисперсию случайной величины Х – числа появления события в этих испытаниях.