Новоселова Наталья Афанасьевна, учитель математики МБОУ «Сорская СОШ №3 с УИОП», г. Сорск, Республика Хакасия

**Математическое моделирование, как метод педагогической диагностики логического развития обучающихся основной школы**

*Аннотация***.** Статья посвящена актуальной теме универсальности «математического инструмента», ключ к решению многих научных задач – их удачный перевод на язык математики. Рассматривается межпредметная связь математики с физикой, химией, астрономии, биологии, географии, экономики иистории.

*Ключевые слова:*математический язык, математическая модель, прикладная задача, выражения, формулы, уравнения, неравенства.

 Наверное, нет сегодня такой области знаний, где бы не применялись достижения математики. Физики и химики, астрономы и биологи, геогра­фы и экономисты, даже языковеды и историки используют математиче­ский аппарат.

 В чем же секрет универсальности «математического инструмента»? Ответ очевиден: ключ к решению многих научных задач — их удачный пере­вод на язык математики.

 Действительно, формулировки задач из разных областей знаний со­держат нематематические понятия. Если математик участвует в решении такой задачи, то он в первую очередь стремится перевести её на «родной», математический язык, т. е. язык выражений, формул, уравнений, нера­венств, функций, графиков и т. д. Результат такого перевода называют **ма­тематической моделью,** а саму задачу — **прикладной задачей.**

 Термин «модель» (от лат. *modulus* — «образец» мы употребляем очень часто: модель самолёта, модель атомного ядра, модель Солнечной си­стемы, модель какого-то процесса или явления и т. п. Изучая свойства мо­дели объекта, мы тем самым изучаем свойства самого объекта.

 Область математики, которая занимается построением и изучением математических моделей, называют **математическим моделированием.**

 В таблице 1 приведены образцы прикладных задач и соответствующих им математических моделей.

Таблица 1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| № | Прикладная задача | Математическаямодель |
| 1 |  Один килограмм картофеля стоит 24 р.  Сколько картофеля можно купить за  120 р.? | Чему равно частное 120 : 24? |
| 2 |  В магазине есть 3 вида чашек и 2 вида тарелок. Сколько существует способов составить набор из одной чашки и одной тарелки? | Чему равно произве­дение 3 • 2? |
| 3 | На стоянке было несколько автомобилей. Когда 5 машин уехало, осталось 2 машины. Сколько автомобилей было на стоянке сначала? | Найдите корень i уравнения *х-5=2* |
| 4 | Из 156 жёлтых, 234 белых и 390 красных роз со­ставили букеты. Какое наибольшее количество букетов можно составить так, чтобы во всех буке­тах роз каждого цвета было поровну и все розы были использованы?  | Найдите НОД2 (156; 234; 390) |
| 5 | Автомобиль тратит 7,8 л бензина на 100 км пути. Хватит ли 20 л бензина, чтобы доехать от Рязани до Владимира, если расстояние между этими го­родами составляет 233 км? | Сравните значениевыражения $$\frac{7,8∙233}{100}$$ с числом 20 |

 Цель решения любой задачи — получить верный ответ. Поэтому со­ставление математической модели — это только первый этап решения при­кладной задачи.

Решение прикладной задачи состоит из трёх этапов.

**1) Построение математической модели.**

**2) Решение математической задачи.**

**3) Анализ полученного результата, исходя из содержания приклад­ной задачи.**

 Первый этап иллюстрируют приведённые выше примеры. Заметим, что успешная реализация этого шага требует определённых знаний в обла­сти, к которой относится данная прикладная задача.

 Реализация второго этапа связана с математической деятельностью: нахождение значений выражений, решение уравнений, неравенств и их си­стем, построение графических объектов и т. п.

 На третьем этапе полученный результат надо записать на языке при­кладной задачи. Поясним это, обратившись к приведённой таблице. Напри­мер, ответы к первой, второй, третьей задачам надо записать так: можно купить о кг картофеля; покупку можно осуществить 6 способами; на стоян­ке было 7 автомобилей. Далее ответ следует проанализировать на соответ­ствие условию прикладной задачи. Например, ответ «1,5 ученика» не может быть приемлемым ни для одной прикладной задачи.

 Рассмотрим задачу, в которой уравнение с одной переменной являет­ся математической моделью реальной ситуации.

**Пример 1.** Масса деревянной балки составляет 120 кг, а масса желез­ной балки — 140 кг, причём железная балка на 1 м короче деревянной. Ка­кова длина каждой балки, если масса 1 м железной балки на 5 кг больше массы 1 м деревянной?

**Решение.** В решении задачи выделим три этапа.

*I этап.* Построение математической модели.

Пусть длина деревянной балки равна ***х*** м, тогда длина железной составляет (***х*** -1) м. Масса 1 м деревянной балки равна $\frac{120}{х} $кг, а масса 1 м железной - $\frac{140}{х-1}$ кг. Тогда разность $\frac{140}{х-1}-\frac{120}{х}$

показывает, на сколько масса 1 м железной балки больше массы 1 м деревянной балки. По условию задачи эта разность равна 5 кг. Тогда получаем уравнение $\frac{140}{х-1}-\frac{120 }{х}=5$. Это уравнение и

является математической моделью данной прикладной задачи.

***II этап***. Решение уравнения.

Имеем:

$\frac{140}{х-1}-\frac{120 }{х}=5; \frac{28}{х-1}-\frac{24}{х}=1;$ *28х-24(х-1)=х2-х*

 *х* $\ne 0$

*х* $\ne 1$

 *х2-5х-24=0*

 *х* $\ne 0$

*х* $\ne 1$ *х = 8 или х = -3*

***III этап***. Анализ результата, полученного на II этапе, исходя из со­держания прикладной задачи.

 Корень – 3 не удовлетворяет условию задачи, поскольку такая величина, как длина, не может выражаться отрицательным числом.

 Следовательно, длина деревянной балки равна 8м, а длина железной – 7м.

Ответ: 8м, 7м.

 При оформление решении задач, подобных той, которую мы рассмотрели в примере 1, необязательно явна выделять три этапа решения прикладной задачи. Важно, чтобы эти этапы были реализованы в процессе решения.

 В следующих трёх задачах математической моделью реальной ситуации является система двух уравнений с двумя переменными.

**Пример 2.** От станции М в направлении станции №, расстояние между которыми равно 450 км, отправился скорый поезд. Через 3 часа после этого от станции № в направлении станции М отправился товарный поезд, который встретился со скорым через 3ч после своего выхода. Скорый поезд преодолевает расстояние между станциями М и № на 7ч 30мин. Быстрее, чем товарный. Найти скорость каждого поезда.

**Решение:** Пусть скорость скорого поезда равна х км/ч, а скорость товарного поезда у км/ч. до встречи скорый поезд проехал 6х км, до встречи товарный поезд проехал 3у км. Тогда получим уравнение 6х+3у = 450. Расстояние между станциями М и № скорый поезд проедет $\frac{450}{х}ч;$ а товарный поезд проедет $\frac{450}{у}ч$. Тогда получим уравнение: $\frac{450}{у}-\frac{450}{х}=7\frac{1}{2}$

Получаем систему уравнений:

$6х+3у=450$ 2х+у=150 у=150-2х

$\frac{450}{у}-\frac{450}{х}=7\frac{1}{2}$ $\frac{450}{у}-\frac{450}{х}=\frac{15}{2}$ $\frac{30}{у}-\frac{30}{х}=\frac{1}{2}$

у=150-2х

60х-60у = ху

60х-60(150-2х) = х (150-2х)

60х-9000+120х=150х-2х2

60х-9000+120х-150х+2х2=0

180х-9000-150х+2х2=0

2х2+30х-9000=0

х2+15х-4500=0

$$Д=b^{2}-4ас=15^{2}-4∙1∙\left(-4500\right)=225+18000=18225=135^{2}>0$$

$х\_{1}=\frac{-15+135}{2}=60км/ч$ – скорость скорого поезда

$х\_{2}=\frac{-15-135}{2}=-75км/ч$ - не является решением задачи

 Следовательно: у=150-2х=150-2 $∙ $60=150-120=30км/ч - скорость товарного поезда.

**Ответ:** 60км/ч и 30 км/ч

**Пример 3.** Две бригады, работая вместе могут выполнить производственное задание за 8 дней. Если первая бригада, работая самостоятельно, выполнит $\frac{1}{3}$ задания, а затем её сменит вторая бригада, то задание будет выполнено за 20 дней. За сколько дней каждая бригада может выполнить данное производственное задание, работая самостоятельно?

**Решение:** Пусть 1 бригада может выполнить задание за х дней, а 2 бригада может выполнить задание за у дней. 1 бригада за 8 дней выполнит $ \frac{8}{х}$ часть задания, а 2 бригада за 8 дней выполнит $\frac{8}{у}$ часть задания. Получим уравнение: $\frac{8}{х}+\frac{8}{у}=1$ 1 бригада $\frac{1}{3}$ часть задания выполнит за $\frac{1}{3}х$ дней, 2 бригада оставшуюся часть задания выполнит за $\left(1-\frac{1}{3}у\right)=\frac{2}{3}у$ дней. Получим уравнение: $\frac{1}{3}х+\frac{1}{3}у=20$.

Получим систему уравнений:

$\frac{8}{х}+\frac{8}{у}=1$ 8у+8х = ху 8х+8у – ху = 0

$\frac{1}{3}х+\frac{2}{3}у=20$ х+ 2у = 60 х = 60-2у

8(60-2у)+8у-(60-2у) у = 0

480-16у+8у-60у+2у2 = 0

2у2-68у+480 = 0

у2-34у+240 = 0

$$Д=b^{2}-4ас=34^{2}-4∙1∙240=1156-960=196=14^{2}>0$$

$$у\_{1}=\frac{34+14}{2}=24 дней-задание выполнит 1 бригада$$

$$у\_{2}=\frac{34-14}{2}=10 дней-задание выполнит 1 бригада$$

х1 = 60-2у = 60-2$∙$24 = 12 дней – задание выполнит 2 бригада

х2 = 60-2у = 60-2$∙$10 = 40 дней – задание выполнит 2 бригада

**Ответ:** 12 и 24 дня или 40 и 10 дней.

**Пример 4.** В двух сплавах массы меди и цинка относятся как 5:2 и 3:4. Сколько килограммов первого сплава и сколько килограммов второго надо взять, чтобы, переплавив их, получить 28кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка.

**Решение:** Пусть масса 1 сплава – х кг, а масса 2 сплава – у кг, тогда получим уравнение х+у = 28.

1 сплаве меди - $\frac{5}{7}х кг, $ цинка в 1 сплаве - $\frac{4}{7}у кг$.

Получим уравнение: $\frac{5}{7}х+\frac{3}{7}у=\frac{2}{7}х+\frac{4}{7}у.$

Получаем систему уравнений:

$х+у=28$ х+у = 28 х+у = 28

$\frac{5}{7}х+\frac{3}{7}у=\frac{2}{7}х+\frac{4}{7}у$ 5х+ 3у = 2х+4у 5х-2х = 4у-3у

х+ у = 28

3х = у

х + 3х = 28

4х = 28

х = 7 кг – масса 1 сплава

у = 3х = 3$∙$7 = 21 кг – масса 2 сплава

**Ответ:** 7кг и 21 кг

Библиографический список

1. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. Алгебра. 9 класс. Москва. Издательский центр «Вентана граф», 2014. С. 136-145.

2. Математический энциклопедический словарь. Гл. ред. Прохоров Ю.В.. – М: Сов.Энциклопедия, 1988. С. 847

3. Безручко Б. П., Смирнов Д. А. [Математическое моделирование и хаотические временные ряды](http://nonlinmod.sgu.ru/books.htm). — Саратов: ГосУНЦ «Колледж», 2005.

4. Блехман И. И., [Мышкис А. Д.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D1%8B%D1%88%D0%BA%D0%B8%D1%81%2C_%D0%90%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%B9_%D0%94%D0%BC%D0%B8%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87%22%20%5Co%20%22%D0%9C%D1%8B%D1%88%D0%BA%D0%B8%D1%81%2C%20%D0%90%D0%BD%D0%B0%D1%82%D0%BE%D0%BB%D0%B8%D0%B9%20%D0%94%D0%BC%D0%B8%D1%82%D1%80%D0%B8%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87), [Пановко Н. Г.](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%BE%2C_%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B2_%D0%93%D0%B8%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87%22%20%5Co%20%22%D0%9F%D0%B0%D0%BD%D0%BE%D0%B2%D0%BA%D0%BE%2C%20%D0%AF%D0%BA%D0%BE%D0%B2%20%D0%93%D0%B8%D0%BB%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87) [Прикладная математика: Предмет, логика, особенности подходов. С примерами из механики: Учебное пособие.](http://lib.sibnet.ru/book/9592) — 3-е изд., испр. и доп. — М.:, 2006. С. 376

5. Введение в математическое моделирование. Учебное пособие. Под ред. П. В. Трусова. — М.: Логос, 2004.