Шевцова Мария Витальевна

к.ф.-м.н., доцент кафедры математики

Белгородский государственный университет

Белгород

Shevtsova Maria Vitalievna

Belgorod University

shevtsova\_m@bsu.edu.ru

Гончаров Иван Витальевич

студент

Белгородский государственный университет

Белгород

Goncharov Ivan Vitalievich

Belgorod University

v4nyagonchar04@yandex.ru

**ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ: ЕГО СВОЙСТВА И ПРИЛОЖЕНИЯ**

**PASCAL'S TRIANGLE: ITS PROPERTIES AND APPLICATIONS**

**Аннотация:** С самого раннего детства каждый из нас знаком с такой простой и понятной фигурой, как треугольник. Однако, не все знают о том, что существует еще один, который совершенно не похож на все другие — **треугольник Паскаля.** В данной статье мы подробно рассматриваем определение треугольника Паскаля, краткую история его описания и открытия; подробно рассмотрены его основные свойства и приложения в комбинаторике.

**Abstract:**  From early childhood, each of us is familiar with such a simple and understandable figure as a triangle. However, not everyone knows that there is another one that is completely different from all the others - Pascal's triangle. In this article we examine in detail the definition of Pascal's triangle, a brief history of its description and discovery; Its main properties and applications in combinatorics are discussed in detail.

**Ключевые слова:** треугольник Паскаля, комбинаторика, биномиальный коэффициент, рекурсивность

**Keywords:** Pascal's triangle, combinatorics, binomial coefficient, recursiveness

Треугольник Паскаля — это числовая схема, которая представляет собой треугольник, составленный из чисел. Он является одним из самых известных компонентов комбинаторики и алгебры, и имеет множество интересных свойств и приложений. Треугольник Паскаля был назван так в честь великого французского математика и философа Блеза Паскаля, впервые описавшего его в 1653 году в своем научном «Трактате об арифметическом треугольнике».

**Исторические сведения о треугольнике Паскаля**

Треугольник Паскаля появился в изданном уже после смерти автора сочинении Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике». Там он описывается как простая бесконечная числовая таблица «треугольной формы», в которой по боковым сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух предшествующих чисел. Таким образом, современный равнобедренный треугольник Паскаля отличается от «треугольника», изучаемого самим Паскалем, только поворотом на 45°.

Еще за столетие до выхода в свет трактата Паскаля в «Общем трактате о числе и мере» (1556-1560), написанном выдающимся итальянским математиком Николой Тарталья, была опубликована аналогичная таблица, только в «прямоугольной» форме. В действительности, треугольник Паскаля был известен задолго до даты выхода «Трактата об арифметическом треугольнике». Так, этот треугольник воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанном астрономом из Ингольтштадского университета Петром Апианом в начале XVI века. В книге «Математические новеллы» Мартин Гарднер пишет: «Треугольник Паскаля так прост, что выписать его сможет даже десятилетний ребенок. В тоже время он таит в себе неисчерпаемые сокровища и связывает воедино различные аспекты математики, не имеющие на первый взгляд между собой ничего общего. Столь необычные свойства позволяют считать треугольник Паскаля одной из наиболее изящных схем во всей математике».

**Свойства треугольника Паскаля**

*Рекурсивная структура*

Рекурсивная структура треугольника Паскаля представляет собой числа, которые образуют треугольник в виде таблицы, где каждое число находится на позиции, заданной своими координатами (номер строки и номер столбца).

Треугольник Паскаля можно определить следующим образом: в первой строке треугольника находится число 1, а каждое число внутри равно сумме двух чисел, находящихся над ним (слева и справа).

Приведём начало треугольника Паскаля:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Каждое число в треугольнике Паскаля можно вычислить с помощью рекурсии, используя следующее определение:

* Если номер строки или номер столбца равны 0 или равны номеру строки, то число равно 1. Иначе, число равно сумме двух чисел: число в позиции (строка-1, столбец) и число в позиции (строка-1, столбец-1).

Например, чтобы вычислить число в позиции (3, 2), нужно сложить числа в позициях (2, 1) и (2, 2). С помощью рекурсивной функции можно вычислить любое число в треугольнике Паскаля. Однако, для больших чисел рекурсия может быть неэффективной из-за повторных вычислений. Существуют и другие способы вычисления элементов треугольника Паскаля, например, с помощью использования динамического программирования или математических формул.

*Симметричность*

Симметричность треугольника Паскаля проявляется в том, что если развернуть его по вертикали, то числа в каждой строке будут симметричными относительно оси симметрии, которая проходит через центральное число. Например, в треугольнике Паскаля первая строка [1] является симметричной, вторая строка [1, 1] также является симметричной, третья строка [1, 2, 1] является симметричной, и так далее.

*Биномиальные коэффициенты*

Как мы уже сказали ранее, в треугольнике Паскаля каждое число равно сумме двух чисел, расположенных над ним в предыдущей строке, начиная с единицы. Таким образом, каждое число в треугольнике Паскаля является биномиальным коэффициентом.

Приведём начало треугольника Паскаля:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Первая строка содержит только число 1. Вторая строка содержит две 1. Третья строка содержит числа 1, 2, 1 и так далее.

Биномиальные коэффициенты можно вычислить по формуле:

$$C\_{k}^{n}=\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!} ,$$

где $C\_{k}^{n}$ — биномиальный коэффициент, n — общее количество элементов,
k — количество элементов, выбранных из подмножества.

В треугольнике Паскаля, биномиальный коэффициент $C\_{k}^{n}$ равен числу, расположенному в строке n и столбце k.

Например,

$C\_{0}^{0}$ = 1
$C\_{0}^{1}$ = 1, $C\_{1}^{1}$ = 1

$C\_{0}^{2}$ = 1, $C\_{1}^{2}$ = 2, $C\_{2}^{2}$ = 1

$C\_{0}^{3}$ = 1, $C\_{1}^{3}$ = 3, $C\_{2}^{3}$ = 3, $C\_{3}^{3}$ = 1 и так далее

**Применимость и приложения треугольника Паскаля**

Треугольник Паскаля используется для решения задач комбинаторики, таких как нахождение числа сочетаний или перестановок и «классическая задача» по распределению шаров по ящикам. При всём при этом имеет ряд полезных свойств и применений в этой области

К примеру, биномиальные коэффициенты, о которых мы говорили ранее, и, соответственно, раскрытие биномиальных степеней: коэффициенты в треугольнике соответствуют коэффициентам в разложении. Разложение биномиального выражения (a + b)n может быть записано в виде:
(a + b)n = $C\_{0}^{n}$anb0 + $C\_{1}^{n}$a(n-1)b1 + $C\_{2}^{n}$a(n-2)b2 + ... + $C\_{n}^{n}$a0bn

где $C\_{k}^{n}$ - коэффициент при слагаемом (akbn-k) и вычисляется из треугольника Паскаля.

Пример разложения биномиального выражения (a + b)3:
(a + b)3 = $C\_{3}^{0}$a3b0 + $C\_{3}^{1}$a2b1 + $C\_{3}^{2}$a1b2 + $C\_{3}^{3}$a0b3 = 1a3b0 + 3a2b1 + 3a1b2 + 1a0b3 =
= a3 + 3a2 b + 3ab2 + b3

Треугольник Паскаля также используется для вычисления вероятностей в биномиальном распределении, где каждый элемент треугольника представляет вероятность определенного числа успехов в заданном количестве испытаний.

Ещё одно приложение — сумма каждой строки, которая всегда равна степени двойки. Например, сумма первой строки треугольника равна 20 = 1, сумма второй строки равна 21 = 2, сумма третьей строки равна 22 = 4 и т.д.

**Заключение**

Треугольник Паскаля является мощным и универсальным инструментом в комбинаторике, алгебре и других областях математики. Его свойства и приложения делают его важным инструментом для решения различных задач, связанных с числами и комбинаторикой. Треугольник Паскаля так же прост, изящен и велик, как и все гениальное: каждое число его равно сумме двух чисел, которые расположены над ним. Нетрудно догадаться, что данный треугольник может быть каким угодно большим — его можно продолжать бесконечно. Треугольник Паскаля является не только интересным числовым треугольником, но также имеет и другие важные области применения в математике.

**Список литературы**

1. Бухштаб, А.А. Теория чисел [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.А. Бухштаб. — Электронные текстовые данные. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 384 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/65053. — Загл. с экрана.
2. Майстров Л.Е. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия / А.П. Юшкевич, И.Г. Башмакова, Л.Е. Майстров, Б.А. Розенфельд. М.: Наука, 1970. Т.2. 300 с.
3. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. Элементы статистики и теории вероятностей. Алгебра 7-9 классы/Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк. М.: Просвещение, 2009. 78
4. Сизый, С.В. Лекции по теории чисел [Электронный ресурс] : учебное пособие / С.В. Сизый. — Электронные текстовые данные. — Москва : Физматлит, 2008. — 192 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2319. — Загл. с экрана. (3)
5. Успенский В. А. Треугольник Паскаля / В.А. Успенский. – Москва: 1979.