УДК 519.17

Шевцова Мария Витальевна

к.ф.-м.н., доцент кафедры математики

Белгородский государственный университет

Белгород

Shevtsova Maria Vitalievna

Belgorod University

shevtsova\_m@bsu.edu.ru

Сырбу Диана Аркадьевна

студент

Белгородский государственный университет

Белгород

Syrbu Diana Arkadyevna

Belgorod University

di.syrbu2016@yandex.ru

**ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ (ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ КОМПЛЕКСНОГО КОРНЯ)**

**THE BASIC THEOREM OF ALGEBRA (THE THEOREM ON THE EXISTENCE OF A COMPLEX ROOT)**

**Аннотация:** В статье рассматривается формулировка и доказательство основной теоремы алгебры (теорема о существовании комплексного корня). Утверждение о том, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто, то есть что всякий отличный от константы многочлен (от одной переменной) с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один корень в поле комплексных чисел. Статья может быть полезна студентам и исследователям, изучающим алгебру.

**Abstract:** The article considers the formulation and proof of the main theorem of algebra (the theorem on the existence of a complex root). The statement that the field of complex numbers is algebraically closed, that is, that every polynomial other than a constant (from one variable) with complex coefficients has at least one root in the field of complex numbers. The article may be useful for students and researchers studying algebra.

**Ключевые слова:** комплексное число, основная теорема алгебры, многочлен, комплексный корень, выражение, формулировка, доказательство, функция.

**Keywords:** complex number, basic theorem of algebra, polynomial, complex root, expression, formulation, proof, function.

**Формулировка основной теоремы алгебры и её доказательство.**

*Теорема* (основная теорема алгебры — ОТА). Всякий многочлен положительной степени с комплексными коэффициентами ( имеет хотя бы один комплексный корень, т. е. всегда найдется такое число , что . [1, С. 309]

*Доказательство*. Прежде всего сведем изучение корней многочлена , как комплексной функции комплексного переменного , к изучению корней (нулей) действительной функции комплексного переменного

.

Точки , представляются как точки, в которых достигается наименьшее значение (равное нулю) для действительной функции . В этих точках поверхность-график (расположенная в верхнем полупространстве трехмерного пространства с координатами , где , достигает горизонтальной плоскости .

Рассмотрим точную нижнюю грань (минимум) значений функции : .

Неотрицательность рассматриваемой функции влечет существование и неотрицательность числа .

Далее установим, что минимум достигается в некоторой точке , т. е. является наименьшим значением функции.

Далее докажем лемму о возрастании модуля многочлена.

*Лемма 1 (о возрастании модуля многочлена)*. Рассмотрим многочлен с комплексными коэффициентами положительной степени. Если последовательность комплексных чисел такова, что (в поле ), то и (в поле ).

*Доказательство*. Подчеркнем прежде всего, что в формулировке леммы речь идет о сходимости к бесконечности последовательностей действительных чисел. (Так, сходимость к ∞ первой из последовательностей означает, что ее члены , начиная с некоторого номера, становятся больше любого наперед заданного положительного числа. Это равносильно сходимости к нулю последовательности ).

.

Исследуем поведение последнего из выражений в цепочке при . Сумма в круглых скобках содержит дробей с постоянными (неотрицательными) числителями и со знаменателями, стремящимися к . Значит, каждая из дробей стремится к нулю и все выражение в круглых скобках также стремится к нулю. Следовательно, выражение в квадратных скобках стремится к положительной константе . Перед квадратными скобками стоит множитель , стремящийся к . Следовательно, и все (последнее в цепочке) выражение стремится к . А с ним вместе и .

Вторым этапом установим Лемму Д'Аламбера, в которой утверждается, что если в некоторой точке значение многочлена отлично от нуля (и следовательно, , то найдется такая точка , что .

Далее заметим, что наименьшее значение , достижимость которого установлена в лемме Д'Аламбера, не может быть положительным, ибо это противоречило бы этой лемме.

Этим доказательство завершается: точка , в которой достигается инфинум значений модуля данного многочлена, должна быть корнем этого многочлена. [1, C. 310]

**Заключение**

В связи с существованием комплексных чисел можно утверждать, что любое уравнение имеет хотя бы один корень, рациональный, действительный или комплексный.

**Список литературы:**

1. Н.И. Яцкин Алгебра : Теоремы и алгоритмы : учеб. пособие / Н. И. Яцкин. — Иваново : Иван. гос. ун-т, 2006. — 506 с.
2. Сборник задач по алгебре. Часть 1. Рациональные и иррациональные уравнения и неравенства. В помощь учащимся 10–11-х классов/ О.В. Нагорнов, А. В. Баскаков, О. Б. Баскакова, С. А. Гришин, А. Б. Костин, Р. Р. Резванов, Д. С. Теляковский. – М.: НИЯУ МИФИ, 2009. – 156 с.
3. Т. В. Родина Комплексные числа. Учебно-методическое пособие. – СПб: СПбГУ ИТМО, 2009. – 30с.
4. Куликова Л. Б. Поторочина К.С. Комплексные числа. Сборник типовых заданий. URL: <https://fizteh.urfu.ru/fileadmin/user_upload/site_19855/Studentu/Literatura/FKP_i_operacionnoe_ischislenie_dlja_specialnosti___prikladnaja_matematika__/IDZ_kompleksnye_chisla__PDF__350KB_.pdf>