**ИМПУЛЬСНЫЕ ФУНКЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ**

**К.Н. Пузатых**

**Аннотация.** В статье рассматриваются импульсные функции, также рассмотрена связь между импульсными функциями и другими функциями. Здесь представлены различные способы определения и введения импульсных функций, их применение при решении задач.

*Ключевые слова: импульсные функции, обобщённые функции, δ — функция Дирака, функция Хевисайда, единичный импульс, единичная функция, функция единичного скачка, прямоугольная импульсная функция, иглообразная функция, гауссовская импульсная функция.*

Введение импульсных функций было вызвано появлением в ХХ столетии потребностей в описании новых явлений и процессов в различных быстро развивающихся областях знаний. Однако, появление таких функций нельзя связывать только с началом ХХ столетия, так, например, символ Кронекера[[1]](#footnote-1) был введен в 1866 году. К импульсным функциям обычно относят функции, претерпевающие скачкообразные изменения на множестве конечных интервалов, описывающие импульсы прямоугольной, треугольной и иной формы.

Необходимо отметить, что термин импульсные функции используются не всегда. К импульсным функции по существу относятся обобщенныефункции. Из обобщенных функций наиболее известной представительницей импульсной функции является δ — функция Дирака.

В настоящее время уже введено и применяется большое количество импульсных функций. При этом наличие у них особых свойств привело к тому, что при их задании в основном используется способ задания функций словесной формулировкой иногда с совмещением способа задания функций разными формулами на разных частях области определения. Например, функция Хевисайда задается следующим описанием:

*Q(t)=0 при t<0 и Q(t)=1 при t>0, производная равна единичному импульсу, где Q(t) обозначение функции Хевисайда*. [1]

Импульсная функция — это абстракция, импульс с бесконечно большой амплитудой, нулевой шириной и единичным весом (площадью под импульсом), сконцентрированный в точке, в которой значение его аргумента равно нулю. [9, п. 1.2.5]

Единичный импульс задается следующими соотношениями:

Единичный импульс *δ*(*t*) – это не функция в привычном смысле этого слова. Если *δ*(*t*) входит в какую-либо операцию, его удобно считать импульсом конечной амплитуды, единичной площади и ненулевой длительности, после чего нужно рассмотреть предел при стремлении длительности импульса к нулю. Графически *δ*(*t - t*ₒ) можно изобразить как пик, расположенный в точке *t = t*ₒ, высота которого равна интегралу от него или его площади. Таким образом, *Aδ*(*t - t*ₒ*)* с постоянной *А* представляет импульсную функцию, площадь которой (или вес) равна *А*, а значение везде нулевое, за исключением точки *t = t*ₒ.

Единичная импульсная функция δ(t — tₒ), называемая также δ — функцией Дирака, по определению, равна бесконечности, когда ее аргумент равен нулю, и нулю при остальных значениях аргумента, причем площадь под ее графиком равна единице. [5, стр.15]Единичная функция определяется как производная от единичной ступенчатой функции[[2]](#footnote-2). Таким образом,

и

Предположим, что единичная импульсная функция интегрируема по интервалу (-∞; *T*). Тогда результат интегрирования будет равен нулю, половине или единице в зависимости от того, будет *Т* соответственно меньше *tₒ,* равно *tₒ* или больше *tₒ.* Следовательно,

где *U*(*T – tₒ*) – функция единичного скачка:

Таким образом, функция единичного скачка является интегралом от единичной импульсной функции, и мы, следовательно, можем, рассматривать единичную импульсную функцию как производную от функции единичного скачка.

Хотя с математической точки зрения определение импульсной функции не вполне корректно, свойства ее часто оказываются весьма полезными. Например, с помощью единичной импульсной функции можно рассмотреть понятие плотности распределения вероятностей на случай дискретных случайных величин. Для того чтобы сделать введение единичной импульсной функции, или, вернее, операции, более обоснованными, часто удобно рассматривать единичную импульсную функцию как предел бесконечной последовательности обычных функций.

Рассмотрим теперь прямоугольную импульсную функцию,

где *a* ≥ 0.

Если мы теперь положим *a →* 0, то ширина импульса будет стремиться к нулю, высота — к бесконечности, а площадь под графиком будет оставаться постоянной и равной единице. Таким образом, единичную импульсную функцию можно рассматривать как предел последовательности прямоугольных импульсных функций:

Прямоугольная импульсная функция является простым и удобным прототипом импульсной функции, но она разрывна[[3]](#footnote-3).

В некоторых задачах более удобно использовать в качестве такого прототипа функции, обладающие производными. Одной из них является гауссовская импульсная функция:

где *a* > 0.

Для всех значений *a* > 0:

Далее, при *a* → ∞ высота *g* стремится к бесконечности, а края сближаются к нулю. Таким образом, в пределе *a* → ∞ гауссовская импульсная функция удовлетворяет определению единичной импульсной функции, и можно положить:

.

Непрерывная или кусочно — непрерывная функция δ (t, λ) аргумента t, зависящая от параметра λ, называется иглообразной, если [5, стр.5]:

**Библиографический список**

1. Белов А.М. Задание в аналитическом виде ступенчатых и импульсных функций, статья.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.Справочник по математике. Для инженеров и учащихся втузов. -М: Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1986 — 544с.
3. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. - М. Наука, 1979 — 320с.
4. Давенпорт В.Б., Рут В.Л. Введение в теорию случайных сигналов и шумов. -М.: ИЛ, 1960 – 467с.
5. Ершова, В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление. -Минск: Вышэйш. Школа, 1976 - 256с.
6. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. -М.: Наука, 1967 — 592с.
7. Шостак Р.Я. Операционное исчисление. -М.: Высшая школа, 1972 - 280с.
8. Ярославский Л. П. Введение в цифровую обработку изображений. -М.: Сов. радио, 1979. — 312 с.
9. Электронная библиотека siblec.ru, Лекции по Теоритическим основам цифровой связи.

1. Символ Кронекера (или дельта Кронекера) — индикатор равенства элементов, формально: функция двух целых переменных, которая равна 1, если они равны, и 0 в противном случае [статья из Большой советской энциклопедии]. [↑](#footnote-ref-1)
2. К ступенчатым функциям обычно относят функции постоянные на каждом из конечного множества интервалов. При стремлении интервала к нулю, т.е. превращении интервала в точку ступенчатая функция переходит в единичную импульсную функцию. Из обобщённых функций наиболее известной представительницей ступенчатой функции является функция Хевисайда. [↑](#footnote-ref-2)
3. Разрывная функция — функция, имеющая разрыв некоторых точках (точка разрыва — значение аргумента при котором нарушается непрерывность функции). У функций, встречающихся в применениях математики, точки разрыва обычно изолированы, но существуют функции, для которых все точки являются точками разрыва. [Большой Энциклопедический словарь. 2000.] [↑](#footnote-ref-3)