ТЕМА: «Иррациональные уравнения»

Цели:
Обучающая: Ввести понятие иррационального уравнения и показать способ решения через проверку корней способом подставки в исходное уравнение.
Развивающая: Способствовать развитию навыка решения иррациональных уравнений.
Воспитательная: Воспитывать навыки аккуратности и правильности оформления уравнения в тетрадях.

Ход урока

I. Организационный момент
II. Проверка домашнего задания
III. Устно (можно использовать доску, карточки, презентацию).
Преобразуйте выражение (представьте в виде многочлена)
а) $(a-5)^2$; $(a^2+4в)^2$; $(2a-3)^2$; $(-x-7)^2$
б) Верно ли, что
$25x^2+40x+4 = (5x+2)^2$
$4x^2+1-2x = (2x-1)^{2;}$
в) Решить уравнение
$1)\ x^2 = 7;\ 2)\ x^3 = 2;\ 3)\ x^4 = 0;\ 4)\ \sqrt{x} = 7;\ \sqrt[3]{x} = -2;\ \sqrt{x} = -4;\ \sqrt{x} = 0;$
Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называются иррациональными.
Какие из следующих уравнений являются иррациональными?
а) $x+\sqrt{x} = 2$
б) $x\sqrt{7} = 1+x$
в) $y+\sqrt{y^2+9} = 2$
г) $\sqrt{x-1} = 3$
д) $y^2 - 3y\sqrt{2} = 4$
А сейчас самостоятельно изучаем теорию, решения иррациональных уравнений используя различную литературу и учебник. Для большей заинтересованности учащихся при наличии компьютерного класса можно использовать электронный учебник.

1.Теорема
$$\sqrt{h} = g \Leftrightarrow \begin{cases} h = g^2 \\ g \ge 0 \end{cases}$$
2.Теорема
$$\sqrt[3]{h} = g \Leftrightarrow h = g^3$$

<u>Метод решения:</u>
При решении иррациональных уравнений почти всегда необходимо избавиться от радикалов.
Один из возможных методов состоит в том, что корень из выражения с переменой переносится в одну из частей равенства, а все остальные выражения в другую (уединение радикала).
После уединения выполняется возведение в квадрат, в куб или в другую степень.
Иррациональные уравнения-следствия.

Теорема: $\sqrt{h} = g \Rightarrow h = g^2$
Контроль:
При переходе от уравнения: $\sqrt{h} = g$ к уравнению $h = g^2$ может произойти появление посторонних корней, а именно корней уравнения $\sqrt{h} = -g$.

<u>Метод:</u>
При решении уравнения переходим к уравнению-следствию, проверка должна входить в решение как обязательная часть.
Проверка может осуществляться различными способами:

1. Каждый из найденных корней уравнения-следствия подставить в исходное уравнение и проверить, является ли он корнем исходного уравнения.

2. "Вспомнить" все неравенства, которые надо было включать в систему, чтобы переходы были равносильными, и проверить выполняются ли для найденных "корней" эти неравенства.
(Проверить выполнение неравенства иногда бывает значительно проще, чем выполнение точного равенства).
Сегодня мы разбираем только уравнения первого способа.
IV. Переходим к записям в тетрадь
Число. Тема: Иррациональные уравнения.
У каждого на парте карточка с уравнениями:
1. $\sqrt{x+2} = x$ (комментированный разбор у доски решения - ученик)
2. $\sqrt{x-6} - \sqrt{4-x} = 0$ (с комментированием на месте)
3. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} - \sqrt{4x-7} = 0$ (решение на доске и в тетрадях – ученик)

Решение:

1. $\sqrt{x+2} = x$
Возведем обе части уравнения в квадрат.
$x + 2 = x^2$
$x^2 - x - 2 = 0$
По теореме Виета:
$\left[\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 * x_2 = -2 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}\right.$
Проверка
1). $x_1 = -1$ $\quad \sqrt{-1+2} = -1$ ложно
2). $x_2 = 2$ $\quad \sqrt{2+2} = 2$ верно
Ответ: $x = 2$

2. $\sqrt{x-6} - \sqrt{4-x} = 0$
Уединяем радикалы
$\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$
Возводим обе части уравнения в квадрат
$x - 6 = 4 - x$
$2x = 10$
$x = 5$
Проверка:
$x = 5$ $\quad \sqrt{5-6} - \sqrt{4-5} = 0$ ложно
Ответ: нет корней.

3. $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} - \sqrt{4x-7} = 0$
Уединяем радикалы
$\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$
Возведем в квадрат обе части уравнения
$x + 2 - 2\sqrt{(x+2)(2x-3)} + 2x - 3 = 4x - 7$
$3x - 1 - 2\sqrt{(x+2)(2x-3)} = 4x - 7$
$-2\sqrt{(x+2)(2x-3)} = x - 6$
Возведем в квадрат обе части уравнения:
$4(2x^2+x-6) = x^2-12x+36$
$8x^2+4x-24-x^2+12x-36 = 0$
$7x^2+16x-60 = 0$
$D = 256+1680 = 1936$
$x_1 = \dfrac{-16+44}{14} = \dfrac{28}{14} = 2$
$x_2 = \dfrac{-16-44}{14} = -\dfrac{60}{14} = -4\dfrac{2}{7}$
Проверка:
$x = -4\dfrac{2}{7}$, то $\sqrt{-4\dfrac{2}{7}+2} - \sqrt{2\cdot\left(-4\dfrac{2}{7}-3\right)} - \sqrt{4\cdot\left(-4\dfrac{2}{7}-7\right)} = 0$ (*нет*)
$x = 2$, то $\sqrt{2+2} - \sqrt{4-3} - \sqrt{4\cdot 2-7} = 0$ (*да*)
Ответ: 2.

Далее сильные учащихся разбирают решение более сложного уравнения по шаблону (или использовать компьютер):

$(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6$

$(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}-2x+6=0$

$(x-3)\cdot\sqrt{x^2-5x+4}-2\cdot(x-3)=0$

$(x-3)\cdot\left(\sqrt{x^2-5x+4}-2\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-3=0\\x^2-5x+4\geq 0\end{cases}\\ \sqrt{x^2-5x+4}-2=0\end{array}\right. \qquad \Rightarrow x=3\,(\textit{не является решением})$$

$\sqrt{x^2-5x+4}-2=0$

$x^2-5x+4=4$

$x^2-5x=0$

$x\cdot(x-5)=0$

$x_1=0$ *или* $x_2=5$

Ответ: 0;5.

Остальные самостоятельно решают уравнение (на доске и в тетрадях объясняет решение учитель):

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+6}=7$

Возведем обе части в квадрат

$x-1+2\sqrt{(x-1)\cdot(x+6)}+x+6=49$

$2x+5+2\sqrt{x^2+6x-x-6}=49$

$2\sqrt{x^2+5x-6}=44-2x$

$\sqrt{x^2+5x-6}=22-x$

$x^2+5x-6=484-44x+x^2$

$49x-490=0$

$x=10$

Проверка:

$\sqrt{10-1}+\sqrt{10+6}=7-\textit{верно}$

Ответ: 10

Проверка усвоения учащимися материала на оценку “3” - ученики остаются на местах и решают уравнения (по выбору 2):

а) $\sqrt{x^2-5}=2$; б) $\sqrt{x}=x-2$; в) $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$

Решения:

Проверка усвоения учащимися материала на оценку “4” и “5”: учащиеся решают за компьютером уравнения по выбору из предложенных уравнений. Компьютер проверяет (с записью в тетрадь) или на местах (проверка по шаблону).

Уравнения:

1. $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$	*Ответ*: -1
2. $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$	*Ответ*: $-1;2$
3. $\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{8x}+\sqrt{2x+3}$	*Ответ*: 0,5
4. $(x^2-4)\cdot\sqrt{1-x}=0$	*Ответ*: $-2;0$
5. $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$	*Ответ*: $-\sqrt{3}$
6. $(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}+6x=12$	*Ответ*: 8;-7
7. $\sqrt{x^2-5x-5}=\sqrt{2x^2-11x-5}$	*Ответ*: 6

Решения:

3). $\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{8x}+\sqrt{2x+3}$

$6x+1+2\sqrt{(6x+1)\cdot(4x+2)}+4x+2=8x+2\sqrt{8x\cdot(2x+3)}+2x+3$

$\sqrt{24x^2+12x+4x+2}=\sqrt{16x^2+24x}$

$24x^2+16x+2=16x^2+24x$

$8x^2-8x+2=0$

$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0$

$x=\frac{1}{2}$

Проверка : $\sqrt{6\cdot 0{,}5+1}+\sqrt{4\cdot 0{,}5+2}=\sqrt{8\cdot 0{,}5}+\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}+3}$ (*да*)

Ответ : 0,5

3). $\sqrt{6x+1}+\sqrt{4x+2}=\sqrt{8x}+\sqrt{2x+3}$

$6x+1+2\sqrt{(6x+1)\cdot(4x+2)}+4x+2=8x+2\sqrt{8x\cdot(2x+3)}+2x+3$

$\sqrt{24x^2+12x+4x+2}=\sqrt{16x^2+24x}$

$24x^2+16x+2=16x^2+24x$

$8x^2-8x+2=0$

$4x^2-4x+1=0$

$(2x-1)^2=0$

$x=\frac{1}{2}$

Проверка : $\sqrt{6\cdot 0{,}5+1}+\sqrt{4\cdot 0{,}5+2}=\sqrt{8\cdot 0{,}5}+\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}+3}$ (*да*)

Ответ : 0,5

4). $(x^2-4)\cdot\sqrt{1-x}=0$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-4=0\\1-x\geq 0\end{cases}\\ \sqrt{1-x}=0\end{array}\right.\qquad\begin{cases}x_1=2\ (\textit{неудовл.})\\x_2=-2\\x\leq 0\end{cases}$

$1-x=0$

$x=1$

Ответ : $-2;0$

5). $\sqrt{x^4-2x-5}=1-x$

$x^4-2x-5=(1-x)^2$

$x^4-2x-5=1-2x+x^2$

$x^4-x^2-6=0$

$x^2=t,\ t\geq 0$

$t^2-t-6=0$

$t_1=3$

$t_2=-2$ (*не удовл. усл.* $t\geq 0$)

$x^2=3$

$x=\pm\sqrt{3}$

Проверка :

$x=\sqrt{3}$, *то* $\sqrt{(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}-5}=1-\sqrt{3}$ (*нет*)

$x=-\sqrt{3}$, *то* $\sqrt{(-\sqrt{3})^4+2\sqrt{3}-5}=1+\sqrt{3}$ (*да*)

Ответ : $-\sqrt{3}$

$6).(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}-6x=12$

$(2-x)\cdot\sqrt{x^2-x-20}-6(2-x)=0$

$(2-x)\cdot\left(\sqrt{x^2-x-20}-6\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-x=0\\ x^2-x-20\ge 0\end{cases}\\ \sqrt{x^2-x-20}-6=0\end{array}\right. \qquad \begin{cases}x=2\\ x^2-x-20\ge 0\end{cases} \Rightarrow \textit{нет решения}$$

$x^2-x-20=36$

x^2-x-56

$D=225$

$x_1=8;\quad x_2=-7$

Ответ: 8;–7

$7).\sqrt{x^2-5x-5}=\sqrt{2x^2-11x-5}$

$x^2-5x-5=2x^2-11x-5$

$x^2-6x=0$

$x_1=0;\quad x_2=6$

Проверка:

$x=0,\textit{то}\quad \sqrt{0-0-5}=\sqrt{0-0-5}\quad (\textit{нет})$

$x=6,\textit{то}\quad \sqrt{36-30-5}=\sqrt{72-66-5}\quad (\textit{да})$

Ответ: 6

Оценка “5” - решены 5,6 уравнения, если нет решения 5,6 уравнения, то оценка “4”.
V. ИТОГ По окончании урока каждый ученик получает оценку и соответствующие домашнее задание.

Домашнее задание :

Для тех, кто усвоил материал на оценку “3”: № 417(а),№ 418(а), №419(а).

Для тех, кто усвоил материал на оценку “4”: 1). Решить уравнение: $\sqrt{5+2x}=4-x$
2). № 417(в), № 422(в), № 425(б).

Для тех, кто усвоил материал на оценку “5”: 1). Решить уравнение: $\sqrt{5+2x}=4-x$
2). № 417(б), № 422(б), № 425(а).